-564.
[Lu1] G. Lusztig, Modular representations and quantum groups, Contemporary Mathematics, **82** (1989), 59-77.
[Lu2] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc., **3** (1990), 447-498.
[Ka] M. Kashiwara, Base crystalline, C. R. Acad. Sci. Paris, **311** (1990), 277-280.
[Ma] Yu. I. Manin, Quantum groups and noncommutative geometry, Les Publications de Centre de Recherches Scientifiques, Universitde Motreal, 1989.
[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in confomal field theory on P^1 and monodromy representations of braid group, Adv. Stud. Pure Math., **16** (1988), 297-372.
[Ko] T. Kohno, Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, Ann. Inst. Fourier, **37** (1987), 139-160.

（じんぼう　みちお・京都大学理学部）

Vaughan F. R. Jones 氏の業績 I

河　東　泰　之

作用素環論は，A. Connes に続く二人目の Fields 賞受賞者 V. F. R. Jones を出すにいたった．Connes は，**[C2]** に代表される超人的アイディアとテクニックによって，作用素環論を徹底的に深めたが，Jones は，作用素環論における広大な新分野，index 理論を切り開き，絡み目の不変量，Jones 多項式の発見によって，誰もが思いもしなかった数学，物理の他分野との関連を明るみに出した．

Jones の業績は，大雑把には，(i)作用素環上の群作用の分類，(ii) II_1 factor の Jones index の理論，(iii) Jones 多項式の発見とその発展，の 3 つに分かれる．このうち，(ii)は，(i)からの，(iii)は，(ii)からの自然な発展として現れてきたものなので，その流れを明らかにするため，ここでは(i)，(ii)と，そしてこれらがどのようにして(iii)に結びついたかまでを概説する．(iii)については，本号の村上氏による解説を参照されたい．

さて，爆発的発展の出発点となった Jones index とは，荒っぽくいえば次のようなものである．Hilbert 空間上の有界線形作用素のなすある多元環(II_1 factor と呼ばれる——定義は後述)とその部分多元環を考えるとき，体と部分体に対する Galois 群のようなものを考えることができる．その'位数'が Jones index である．このとき普通の有限群とその位数としての整数はすべて現れて来るが，そのほかに，'位数'がもはや整数ではないようなものがたくさん出てくる．こうして現れる数学的対象は有限群の(deformation ではない)量子化とでもいうべきものであり，現在，研究が進められているところであるが，以下，これらにつながる Jones の仕事について，順に説明していくことにする．

なお，Jones index に関する解説としては，**[25]**, **[27]**, **[31]**, **[37]**, **[C4]**, **[Kb]**, **[Ks1]**, **[Ks2]** などが，またそれらを読むための作用素環論の教科書としては，**[KR]**, **[Pd]**, **[S]**, **[St]**, **[T1]**, **[T2]**, **[UOH]** などが参考になろう．

1. II_1 factor とは何か．

残念ながら，Jones の理論の基礎となる，II_1 factor と呼ばれる作用素環については，Murray - von Neumann による発見以来，50 年以上もたっているにもかかわらず，広く知られているとは，いいがたい．そこで，ここで簡単な解説を加えておくことにする．

Hilbert 空間上の有界線形作用素の成す多元環で，$*$-演算について閉じているものを考え，それがノルム位相で閉じているとき，C^* 環，より弱い位相(たとえば作用素の強収束)で閉じているとき，von Neumann 環という．ここでは，主に von Neumann 環を扱う．

まず素朴に，行列環 $M_n(\mathbf{C})$ に対応する，無限次元の，von Noumann 環とは何だろうか，と考えてみる．一番簡単な答えは，すべての有界線形作用素のなす多元環を考える，というものであろう．しかしこれは，多元環としては，それほどおもしろくない．これは，有限次元の可換作用素環 $\mathbf{C}^n$ の無限次元拡張として l^∞ をとったことに対応している．(たとえば，上の行列のうち対角行列だけを考えてみればよい．)ところが，l^∞ より，$L^\infty[0,1]$ のほうがいろいろおもしろいことがあるように，L^∞

$[0,1]$ に対応するもっとおもしろい無限次元拡張があるのである．それには，$\mathbf{C}^2$ の無限テンソル積として $L^\infty\left(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}\right)\cong L^\infty[0,1]$ が得られることを思い出して，$M_2(\mathbf{C})$ の無限テンソル積を作ればよいのである．もう少しきちんというと，$x\in\bigotimes_{i=1}^{n} M_2(\mathbf{C})\mapsto x\otimes 1\in\bigotimes_{i=1}^{n+1} M_2(\mathbf{C})$ という埋込みを用いて有限個のテンソル積の増大列の帰納極限を作り，それを自分自身に内積を入れて作った Hilbert 空間に左からの掛け算で作用させて，作用素の強収束位相で閉包を取る，ということである．このとき，通常の行列のトレースを行列環のサイズで割ったものは埋込みと両立しており，閉包まで伸びる．これを tr で表そう．$\mathrm{tr}(1)=1$, $\mathrm{tr}(xy)=\mathrm{tr}(yx)$ であり，また射影作用素 p に対する $\mathrm{tr}(p)$ の値は，0 から 1 までのすべての実数を取る事に注意する．この作り方は，行列環の刻みをどんどん細かくしていった極限として連続的にぎっしりつまった‘行列環’を作るということである．この von Neumann 環をを approximately finite dimensional II_1 factor という．Approximately finite dimensional (略して AFD) とは，有限次元環の増大列で近似できている環という事を意味し，しばしば hyperfinite とも呼ばれる．また，II_1 とは，Murray-von Neumann による分類の型を示し，上のような tr の存在を意味する．ほかにすべての有界線形作用素の環を意味する I 型，I 型無限次元環と II_1 型のテンソル積で得られる II_∞ 型，さらに難しい III 型がある．Factor の定義は，中心がスカラーのみからなる，ということだが，(作用素の強収束位相などで閉じた) 両側イデアルは自明なものに限る，という単純性と同値である．一般の von Neumann 環は単純なものの‘連続的直和’(直積分) で表されるので，factor がもっとも重要であるといってよい．

Murray-von Neumann によって，AFD かつ，II_1 型の factor は，上とは違う作り方をしても，(たとえば $M_2(\mathbf{C})$ のかわりに $M_3(\mathbf{C})$ を用いても) 同型なものしかできないことが知られている．これは，作用素環論にとってもまた応用上も非常に重要な多元環であり，以下 R で表す．(AFD ではない II_1 factor もたくさんあることは知られているが，それらについてはあまりよくわかっていない．) Connes の最大の結果 **[C2]** はこの AFD II_1 factor の強力な特徴づけであり，その系として，R の部分多元環で factor であるようなもの (subfactor) はすべて，無限次元であれば R に同型であることがわかっている．以下，この subfactor が大切な役割を果たす．

2. 作用素環上の群作用とその分類.

Connes は，彼の III 型 factor の分類の研究のため，**[C1, C3]** で上に述べた AFD II_1 factor の自己同型を完全に分類した．分類基準は，conjugacy より弱い，outer conjugacy というものであったが，自己同型が有限周期を持つ場合には，conjugacy による完全分類を与えている．Jones は，この有限周期の自己同型の分類を，$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の作用の分類とみて，有限群の自己同型作用の分類に拡張した．これが，彼の Genève における学位論文 **[4]** であり，その後の仕事の出発点になっている．作用素環論ではしばしば，多元環の中のユニタリ作用素 u による内部自己同型 $x\mapsto uxu^*$ は，自明なものと考えるので，自明からもっとも遠い群作用 α は，すべての $g\neq 1$ に対して α_g が内部的でないようなものである．このような作用を自由である，という．Jones の結果は，次のものであった．

定理. AFD II_1 factor 上の有限群 G の自由作用は，conjugacy で一意的である．さらに，自由でない作用もあるコホモロジカルな不変量によって完全に分類される．

これは，Connes の得意技であった．超積をあやつる解析的テクニックに対する熟達ぶりを示すと同時に，Jones の代数的アイディアを示す結果でもある．作用素環論では，ノルムの不等式評価などの解析的技巧が重要であり，大物にはそういった方面に強い人が多いが，Jones は，特に代数的な洞察力，構成力にすぐれており，ここに最初からそれが現れている．

上の定理でいうコホモロジカルな不変量とは，Jones 自身によって **[3, 4]** で導入された characteristic invariant といわれるものである．これは，さらに groupoid の作用に拡張されたり，III 型環上の作用の研究に有用なように変形されたりして，今日でも多くの研究を生み出すもととなっている．Jones の Genève での指導教官は葉層で有名な A. Haefliger であり，作用素環そのものについては何も習わず，Paris の Connes のところに直接聞きにいっていたが，Haefliger からは，群のコホモロジーについて，いろいろ教わったとのことである．これに関連して群の相対コホモロジーを直接あつかった論文 **[18]** がある．

この後すぐに，Jones の結果は有限群から離散 amenable 群へと A. Ocneanu によって同じ形で拡張された．(**[O1]**, ただし conjugacy は，より弱い cocycle conjugacy で置き換えられる.) Amenable 群というのは, 作用素環論にとってもっとも自然なクラスである. 可換群は amenable であり, また, 竹崎の双対性によって群作用の問題は双対群の作用の問題に言い換えられるので, これによって可換コンパクト群の AFD II_1 factor への作用の分類への道が開かれた. Jones は, prime と呼ばれる特にたちのよいタイプの作用の分類を **[15]** で, また一般の場合の AFD II 型 factor 上の作用の分類の完成を竹崎と共に **[19]** で行った. 竹崎の双対性を用いて双対作用に移ると, von Neumann 環がもはや factor ではなくなってしまうため, テクニカルにかなり難しくなるところが問題なのだが, これを切り抜けるため, Jones は, 竹崎とともに groupoid を用いる方法を開発し, その有用性を示した. Jones は, 当初から Lie 群の作用素環上の作用に興味を持っており, その極大トーラスとしての可換コンパクト群の作用を研究していたのである. しかし, 現在でも Lie 群作用についてはわかっていることはあまりない.

さらに関連した論文として, 離散群作用に関する **[12, 16]** が, またこれらの手法を C* 環に適用したものとして, **[9, 14]** がある.

3. Jones index の登場.

2 で有限群 G が, AFD II_1 factor R に自己同型として作用している状況を考えた. この様な状況では, 群の半直積に似た, 接合積 (crossed product) といわれる構成法によって, より大きな von Neumann 環, $R \rtimes_\alpha G$ を作ることができる. それは, 簡単にいえば作用 α_g に対して $\alpha_g(x) = u_g x u_g^* (x \in R)$ となる様な新しいユニタリ $u_g (g \in G)$ を多元環 R に添加する, ということである.

すると, 適当な意味で, 群 G の作用を調べることと, もとの多元環 R の大きい多元環 $R \rtimes_\alpha G$ への入り方を調べることが, '同じ' であることが分る. 従って, 有限群作用の問題を二つの多元環の相対的な位置関係の問題に置き換えることができる. たとえば, 上の自由作用という条件は, $R \rtimes_\alpha G$ 内で R のすべての元と可換なものはスカラーに限る, という条件に言い換えられる. この時特に, $R \rtimes_\alpha G$ は factor となり, また AFD であることも分るので, 一意性によって $R \rtimes_\alpha G \cong R$ であり, AFD II_1 factor とその subfactor の組, $R \subset R \rtimes_\alpha G$ を得る. さて, それならば, この包含関係 $R \subset R \rtimes_\alpha G$ を見ただけで, 群 G の情報が復元できるだろうと期待される. 有限群 G の情報として, もっとも重要なものは, G の位数であるから, $R \subset R \rtimes_\alpha G$ から G の位数を取り出す方法を考えてみよう. 上の定義によって $R \rtimes_\alpha G$ は, ベクトル空間としては, $\bigoplus_{g \in G} R u_g$ と分解されることに注意する. 更に, これは, 左 R 加群としての分解にもなっており, 各成分は左 R 加群としては R 自身に同型である. 従って $R \rtimes_\alpha G$ の左 R 加群としてのランクを数えれば, 群 G の位数が分ることになる. ところが, 一般に II_1 factor M が Hilbert 空間 H 上に作用しているとき, その空間の, 作用素環の左加群としてのランクを数える方法は von Neumann 以来知られており, coupling constant という名前がついているのである. ただし, 一般にはこれはもはや整数とは限らず, あらゆる正の実数値が, 可能である. これを $\dim_M H$ と書く.

さて一般に II_1 factor M とその subfator N を考えよう. M は自分自身に左からの掛け算で作用している. 作用されるほうの M に $(x, y) = \mathrm{tr}(y^* x)$ で内積を定義して完備化することにより, Hilbert 空間 $L^2(M)$ が得られる. この時, $\dim_N L^2(M)$ を Jones index といい, $[M : N]$ と表す. 定義より, これは, 1 以上の正の実数 (無限大を含む) である. これは, N を基準にした, M の 'サイズ' を測っているわけである.

例として, AFD II_1 factor R と離散群 G の R 上の自由作用 α を考え, H を G の部分群としよう. (自由作用はいつでも作れる.) このとき $R \rtimes_\alpha H$ が $R \rtimes_\alpha G$ の subfactor となることがわかり, その Jones index $[R \rtimes_\alpha G : R \rtimes_\alpha H]$ は, H の G の部分群としての index, $[G : H]$ にほかならない. これが index という用語の記号の由来である. Atiyah-Singer 型の index 理論も作用素環論と関係してきているのでいささか紛らわしいが, これらは, Fredholm 作用素の index とは関係はない.

さて, Jones はこの index の取りうる値を決定しようと考えた. 1 以上の実数という事が定義から分っているわけだが, II_1 factor のトレイスが連続的な値を取るという性質を考えれば, すべての値が実現できそうでもあり, 又, 上の部分群から作る例を見たところでは, 整数以外の値が実現可能かについては疑問もある様に思える. 実際 Jones は, ごく初期の段階では整数以外は実現不可能であることの証明も試みたことがあるそうである. しかし, Jones は 80 年の段階ではすでに 1 と 2 の間の値はすべて実現不可能であること, 4 以上の値はすべて

実現可能であることに気付いていた．そこで，2と4の間にきっと面白いことがあるに違いないと考えて，これらの数の実現可能性について考えていたのだが，ついに82年，彼は次の驚くべき定理に到達した（[**13, 17**]）．

定理. 任意の II_1 factor M とその subfactor N について，Jones index $[M:N]$ は，$\{4\cos^2\pi/n \mid n=3, 4 \cdots\cdots\} \cup [4, \infty]$ に属し，またこれらの値はすべて実現可能である．

ここで，$\{4\cos^2\pi/n \mid n=3, 4, \cdots\}$ は，$1, 2, 2.618\cdots, 3, \cdots$ と続き，4に収束する数列を与えている．彼はこの証明の課程で，basic construction といわれる II_1 factor をふくらませる構成を続けて用い，Jones tower といわれる II_1 factor の増大列を構成した．このとき彼は各段階で，Jones projection といわれる射影作用素 e_i を作ったが，それらのなす列 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ が，Jones relation といわれる次の有名な関係式を満たすのである．

$$e_i e_j = e_j e_i, \quad |i-j| \neq 1,$$
$$e_i e_{i\pm1} e_i = [M:N]^{-1} e_i.$$

この式が，Jones index の理論と，絡み目不変量，Hecke 環，統計力学，量子群などとの関連の出発点であった．特に，Jones は1984年，[**22**] で，絡み目不変量である Jones 多項式を，上の式とトレースを用いて組み紐群の表現を作ることによって構成している．

上述の定理の Jones による証明 [**17**] は，上の関係式と正値性を用いた計算だが，現在の立場から簡単にいえば，$4\cos^2\pi/n$ という値は，A, D, E 型の Dynkin 図形のグラフに対応する行列のノルムの二乗として現れるのである（[**27, 33**]）．

4. Subfactor の分類に向けて．

作用素環論における Jones の仕事の意義を一言でいえば，subfactor を調べることの重要性と有用性を明らかにしたこと，といえるであろう．実は，subfactor の index という考えは，かなり昔からあり，[**G, Sz**] などの論文も出ていたし，basic construction もほかの状況ですでにある程度研究されていたのであるが，その重要性は長い間気付かれずに眠っていたのである．それを一気に明らかにしたのが Jones の仕事であった．Jones の subfactor に対する問題意識は，すでに初期の論文 [**2**] にも現れている．

伝統的な問題，理論を subfactor の立場で見直すこと，subfactor に関連した新しい問題を研究していくことがこれからの作用素環論の大きなテーマになっていくであろうが，特に AFD II_1 factor の index 有限の subfactor を分類することが，作用素環論にとっても，また結び目理論，共形場の理論など他分野への応用にとっても非常に重要な問題である．これについては，Ocneanu, Popa の活躍が著しい．Jones の tower construction から principal graph と呼ばれるグラフが不変量として現れることが知られていたが（たとえば [**33**] 参照），Ocneanu は [**O2, O3, O4**] で Galois 理論的な立場から，このグラフが群の underlying set の拡張になっており，その上の適当な条件を満たす関数をも同時に考えると，群とその演算，双対群との pairing などに相当する情報が取り出せることを見抜いた．彼はこれを群の拡張として paragroup（または quantized group）と呼んでいる．この paragroup の‘位数’が Jones index である．特に index が4未満のときはこれらのグラフは，A_n, D_{2n}, E_6, E_8 型の Dynkin 図形となり，index の値はこれらに対応する行列の Perron-Frobenius 固有値の二乗として現れる．さらに Ocneanu [**O2**] は，ある条件下（index＜4の場合をすべて含む）でこの paragroup が完全不変量であることを主張し，Popa [**P1, P2, P3**] がさらに一般的な場合を含む最終的な形でその証明を与えた．

ここで完全不変量であることを示すには，与えられた不変量からもとの subfactor $N \subset M$ を復元してみせることが必要になる．それには，subfactor を不変量から構成される有限次元多元環で近似していくのだが，AFD ということより，N も M も単独には有限次元環での近似が可能である．そこで N と M を‘同時’に近似することが問題になる．この近似問題の重要性は早くから認識されており，Jones, Pimsner-Popa, Ocneanu らは，83-84年頃，Popa の orthogonal pair という概念から発展した commuting square という概念がこの問題で重要であること，Jones の downward basic construction（[**17**]）のくりかえしから自然に commuting square が現れることに気付いた．ここで commuting square とは，トレースをもつ4つの作用素環（たいてい有限次元）で，ある可換性の条件をみたすもののことであり，[**31, 33, PP, P1, W**] などに述べられている．その延長として上の Popa, Ocneanu の仕事が来るのである．

Ocneanu は，また，あるたちの悪い状況下では，しばしば，paragroup が自明なものに退化して，完全不

変量とはならないことも最近示している([**O3**]).これは,Jones の予想を大きく裏切る結果であった.

また,Jones の示唆によってこの subfactor の分類問題と 2 で述べた群作用の分類問題を結び付ける研究も始められ,Popa [**P3**] が大きな結果を出している.

一方,3 で説明した Jones の定理で,4 以上のすべての実数値が,Jones index として実現可能,と述べたが,実はここにはまだ,深い問題がある.というのも,AFD II_1 factor とその subfactor $N\subset M$ において,M 内に N と可換な非自明な射影作用素 p があれば,二つの subfactor $pNp\subset pMp$ と $(1-p)N(1-p)\subset(1-p)\cdot M(1-p)$ が得られるが,Jones が [**17**] で構成した index>4 の例はすべて,この意味で分解可能だったからである.そこでこのようなことが起こらない,という既約性の条件を付けたとき,とりうる index の値はどうなるか? という問題が生ずる.(Jones [**17**] の Problem 1.) Index が 4 未満のときは,自動的に既約性が従うことがすでに Jones [**17**] によって示されているのでこれが問題になるのは 4 以上のところである.4 のすぐ上には次の可能な値までギャップがあるのではないか,と予想されており([**27**]),これが Jones [**17**] 以来最大の問題となっていたが,ごく最近ついに Popa [**P3**] によって解決された.それによると Ocneanu が [**HSO**] において構成した値 4.026…(E_{10} に対応する行列のノルムの二乗)が 4 より大きいところでの可能な最小値である,ということである.ここには,グラフ理論の結果が用いられる.また,Jones は既約な場合の index の値としては,代数的整数しか許されないのではないか,といった予想も述べている.

Jones は,昔からある有名な難問を解く,といったタイプの数学者ではない.誰も気付かなかったところに隠された神秘を発見してきた数学者である.作用素環論に奇跡をもたらした Jones の理論の影響は,深く,また長いものになるであろう.われわれはこの時代に作用素環論を研究できる幸せを味わっている.

V. F. R. Jones 氏の論文

[1] Quantum mechanics over fields of nonzero characteristic, Lett. Math. Phys., **2** (1976), 99-103.
[2] Sur la conjugasion de sous-facteurs de facteurs de type II_1, C. R. Acad. Sc. Paris., **284** (1977), 597-598.
[3] An invariant for group actions, Springer Lecture Notes in Math., **725** (1978), 237-253.
[4] Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factor, Memoirs Amer. Math. Soc., **237** (1980), 1-70.
[5] A factor anti-isomorphic to itself but without involutory anti-automorphisms, Math. Scand., **45** (1980), 103-117.
[6] (with T. Giordano) Antiautomorphisms involutifs du facteur hyperfini de type II_1, C. R. Acad. Sc. Paris, **290** (1980), 29-31.
[7] Ismorphisms of the automorphism groups of type II_1 factors, Proc. of 'Topics in modern operator theory' (Timișoara/Herculane, 1980), 211-219.
[8] (with S. Popa) Some properties of MASAs in factors, Proc. of 'Invariant subspaces and other topics' (Timișoara/Herculane, 1981), 89-102.
[9] (with R. Hermann) Period two automorphisms of UHF C*-algebras, J. Funct. Anal., **45** (1982), 169-176.
[10] (with A. Connes) A II_1 factor with two nonconjugate Cartan subalgebras, Bull. Amer. Math. Soc., **6** (1982), 211-212.
[11] Central sequences in crossed products of full factors, Duke Math. J, **49** (1982), 29-33.
[12] Actions of discrete groups on factors, Proc. Sympos. Pure Math., **38** (1982), 167-177.
[13] L'indice d'un sous-facteur d'un facteur de type II_1, C. R. Acad. Sc. Paris., **294** (1982), 391-394.
[14] (with R. Hermann) Models of finite group actions, Math. Scand., **52** (1982), 312-320.
[15] Prime actions of compact abelian groups on the hyperfinite type II_1 factor, J. Operator Theory., **9** (1982), 181-186.
[16] A converse to Ocneanu's theorem, J. Operator Theory, **10** (1983), 61-63.
[17] Index for subfactors, Invent. Math., **72** (1983), 1-25.
[18] (with N. Habegger, O. Pino-Ortiz & J. Ratcliff) The relative cohomology of groups, Comm. Math. Helv., **59** (1984), 149-164.
[19] (with M. Takesaki) Actions of compact abelian groups on semifinite injective factors, Acta Math., **153** (1984), 213-258.
[20] Groupes de tresses, algèbres de Hecke et facteurs de type II_1, C. R. Acad. Sc. Paris., **298** (1984), 505-508.
[21] (with A. Connes) Property T for von Neumann algebras, Bull. London Math. Soc., **17** (1985), 57-62.
[22] A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **12** (1985), 103-112.
[23] Index for subrings of rings, Contemp. Math., **43** (1985), 181-190.
[24] (with F. Goodman & P. de la Harpe) Classification des matrices entieres nonnegatives de

petites norme, C. R. Acad. Sc. Paris, **300** (1985), 463-465.

[25] A new knot polynomial and von Neumann algebras, Notices Amer. Math. Soc., **33** (1986), 219-225.

[26] Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Pitman Research Notes in Math., **123** (1986), 242-273.

[27] Index for subfactors and related topics, Proc. ICM-86, 939-947.

[28] (with R. Hermann) Central sequences in crossed products, Contemp. Math., **62** (1987), 539-544.

[29] (with K. Schmidt) Asymptotically invariant sequences and approximate finiteness, Amer. J. Math., **109** (1987), 91-114.

[30] Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., **126** (1987), 335-388.

[31] Subfactors and related topics, 'Operator Algebras and applications', Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **136** (1988), 103-118.

[32] On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math., **137** (1989), 311-334.

[33] (with P. de la Harpe and F. Goodman) Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, (1989).

[34] (with David M. Goldschmidt) Metaplectic link invariants, Geom. Dedicata, **31** (1989), 165-191.

[35] On a certain value of the Kaufman polynomial, Comm. Math. Phys., **125** (1989), 459-467.

[36] Notes on subfactors and statistical mechanics, Internat. J. Modern Phys., A, **5** (1990), 441-460.

[37] Subfactors, knots and statistical mechanics, Proc. of the CBMS Conference.

文　献

[C1] A. Connes, Outer Conjugacy classes of automorphisms of factors, Ann. Sci. École Norm. Sup., **8** (1975), 383-419.

[C2] —, Classification of injective factors, Ann. Math., **104** (1976), 73-115.

[C3] —, Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1, Acta Sci. Math., **39** (1977), 39-66.

[C4] —, Indice des sous-facteurs, algebres de Hecke et théorie des noeuds, Astérisque, **133-134** (1986), 289-308.

[G] M. Goldman, On subfactors of type II_1, Mich. Math. J., **6** (1959), 167-172.

[HSO] U. Haagerup & J. Schou, with an appendix by A. Ocneanu, in preparation.

[KR] R. Kadison & J. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, Academic Press, 1986.

[Kb] T. Kobayashi, 絡み目理論の新しい不変量, 数学, **38** (1986), 1-14.

[Ks1] H. Kosaki, 作用素環の指数理論, 数学, **41** (1989), 289-304.

[Ks2] —, Jones の指数理論とその発展, 京大数理研講究録, 688, 作用素環論と指数理論.

[O1] A. Ocneanu, Actions of discrete amenable groups on factors, Springer Lecture Notes in Math., **1138** (1985).

[O2] —, Quantized group string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge Univ. Press, 1988, pp. 119-172.

[O3] —, Quantum Symmetry, Differential Geometry of Finite Graphs and Classification of Subfactors, 東大セミナリーノート, 1990.

[O4] —, ICM-90 講演.

[Pd] G. K. Pedersen, C* -algebras and their automorphism groups, London Mathematical Society Monographs, Vol. 14, Academic Press, London, 1979.

[PP] M. Pimsner & S. Popa, Entropy and index for subfactors, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **19** (1986), 57-106.

[P1] S. Popa, Classification of subfactors: reduction to commuting squares, Invent. Math., **101** (1990), 19-43.

[P2] —, Sur la classification des sousfacteurs d'indice fini du facteur hyperfini, preprint.

[P3] —, ICM-90 講演.

[S] S. Sakai, C* -algebras and W* -algebras, Springer Verlag, 1971.

[St] S. Strătilă, Modular Theory in Operator Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, Tunbridge Wells, 1981.

[Sz] N. Suzuki, Extensions of rings of operators in Hilbert spaces, Tohoku Math. J., **14** (1962), 217-232.

[T1] M. Takesaki, Theory of operator algebras I, Springer, Berlin, 1979.

[T2] —, 作用素環の構造, 岩波書店, 1983.

[UOH] H. Umegaki, M. Ohya, & F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版, 1985.

[W] H. Wenzl, Hecke algebras of type A and subfactors, Invent. Math., **92** (1988), 345-383.

(かわひがし　やすゆき・東京大学理学部)