フィールズ賞受賞者紹介

V. G. Drinfel'd 氏の業績 I

織　田　孝　幸

Drinfel'd の数論関連の仕事の大部分は有限体上の一変数代数関数体の GL_2 に関する Langlands の予想の証明に関わっている．これは GL_1 のときには類体論の基本定理に相当する．これが証明されたことは，新しい深い重要な相互法則が得られたことを意味する．

関数体の GL_2 の場合，代数体の場合とちがって Shimura 多様体のようなものは存在せず，彼によって楕円 A-加群(elliptic A-modules)や F-層(F-sheaves)の moduli 空間として発見されるまで，誰にも想像がつかなかった．しかも種々の大きな技術的な難しさを克服して Langlands 予想の証明にまとめあげた．

長い間 announcement と他の人による紹介しかなかったが，ここ 2, 3 年前から本人による証明の詳細を書いた論文が現われた．証明は通常の論文の書き方を何分の 1 かにつづめた感じで，しかも技術的にも難しいことをやっているので決して読み易くない．以下に理解しえたかぎりでその内容のあらましを記す．

(1)　関数体の場合の Langlands の予想

pを素数とする．$k=\boldsymbol{F}_q$ をq 個の元からなる標数 p の有限体，K を k 上の一変数代数関数体とする．まず類体論の非アーベル化と見做せる Langlands の予想を定式化する．以下 p と異なる素数 l をひとつえらび，l 進体 $\boldsymbol{Q}_l$ の閉包 $\bar{\boldsymbol{Q}}_l$ を考える．$\Omega=\bar{\boldsymbol{Q}}_l$ とおく．

まず局所的な話を少し思い出す．v を K の素点として，K_v でv に関する完備化，$\mathcal{O}_v$ をその整数環，$\mathfrak{p}_v$ を極大イデアル，剰余体 $k_v=\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の元の個数を q_v と書く．

一般に局所コンパクト群 G と開コンパクト部分群 U が与えられたとき，Ω-線型空間 H 上の G の表現 π: $G\to\mathrm{Aut}\,H$ が smooth であるとは，各 $v\in H$ の安定化群が G の中の開部分群であるときをいい，さらに U-不変部分空間 H^U が有限次元であるとき，π を admissible という．表現 π の既約性は代数的な意味で定める．

$GL_2(K_v)$の既約 admissible 表現(π, H)が零でない $GL_2(\mathcal{O}_v)$-不変なベクトルをもつとき(つまり class-1 のとき)不分岐という．$GL_2(K_v)$の不分岐既約 admissible 表現は次のようにして得られる．B を $GL_2(K_v)$の上三角行列からなる部分群とし，$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda_1, \lambda_2\in\Omega^*=\Omega-\{0\})$ に対して，B の Ω^* に値をもつ指標 χ_λ を $\chi_\lambda\left(\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\right)=(q_v\lambda_1)^{\mathrm{ord}_v(b_{11})}\cdot\lambda_2^{\mathrm{ord}_v(b_{22})}$ で定める．このとき誘導表現 $\mathrm{Ind}_B^{GL_2(K_v)}\chi_\lambda$ は generic な λ に対して既約であって不分岐な表現を与え，既約でなくなる λ に対しても，これの有限組成列に現われる既約表現で不分岐となるものがただ 1 つある．これを π_λ と記す．π_λ は不分岐球表現と呼ばれるものである．$\pi_{(\lambda_1,\lambda_2)}=\pi_{(\lambda_2,\lambda_1)}$ である．

さてもう一方の Weil 群を思い出す．K_v の分離閉包 $\bar{K}_v$ の Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ から剰余体 k_v の Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ への自然な全射準同型 r_v を考える．Frobenius 写像 F_{r_v}: $\chi\in\bar{k}_v\mapsto\chi^{q_v}$ で生成される $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$の巡回部分群の r_v による原像を，W_{K_v} と記し，K_v の局所 Weil 群という．W_{K_v} は $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$の dense な部分群で，$\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$の惰性群 I_{K_v} は W_{K_v} の正規部分群で剰余群 W_{K_v}/I_{K_v} は F_{r_v} で生成される無限巡回群である．

W_{K_v} の Ω 上の有限次元表現が完全可約で，I_{K_v} に制限して自明であるとき不分岐な表現であるといわれる．

$GL_2(K_v)$の不分岐既約 admissible 表現の同値類の集合と，W_{K_v} の 2 次の不分岐表現の同値類の間には次の 1 対 1 対応がある．ρ: $W_{K_v}\to GL_2(\Omega)$は W_{K_v}/I_{K_v} の生成元 F_{r_v} の像で定まり，$\rho(F_{r_v})$は半単純であるので，$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ という元と $GL_2(\Omega)$の中で共役である．このとき ρ に $GL_2(K_v)$の表現 π_λを対応させる．これを局所 Langlands 対応ということにして，$\pi_\lambda\underset{v}{\sim}\rho$ と記す．分岐する場合の対応は論じない．

大域的な Langlands 予想の定式化をはじめよう．$k=\boldsymbol{F}_q$ 上の一変数代数関数体 K のアデール環を $\boldsymbol{A}$ とする．$GL_2(\boldsymbol{A})$上の尖点形式の空間を定義する．

$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}=\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(GL_2(K)\backslash GL_2(\boldsymbol{A}))$ を $GL_2(K)\backslash$

$GL_2(\boldsymbol{A})$上の Ω- 値局所定数関数 f で次の条件を満すものからなる Ω-線型空間とする．即ち f は，GL_2 の任意の Borel 部分群の unipotent 根基 U に対して，$\int_{U_K\backslash U_{\boldsymbol{A}}} f(ux)\,du=0$．但し du は $U_{\boldsymbol{A}}$ の Haar 測度．このとき $GL_2(\boldsymbol{A})$は右移動によって，$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ に作用する．$GL_2(\boldsymbol{A})$の既約 admissible 表現で，$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ の部分表現となるものを尖点的保型表現という．$GL_2(\boldsymbol{A})^{\wedge}_{\mathrm{cusp}}$ でこのような表現の集合を表わす．

$GL_2(\boldsymbol{A})$の既約 admissible 表現(π, H)は，$\pi=\bigotimes_v \pi_v$ と各素点 v に関する $GL_2(K_v)$の既約 admissible 表現 π_v の制限テンソル積となる．このとき有限個の素点の集合 S があって，$v\notin S$ ならば π_v は不分岐となり，π は S の外で不分岐であるという．次はよく知られた重要な事実である．

強重複度1定理． $GL_2(\boldsymbol{A})$の２つの尖点的保型表現(π, H), (π', H')は有限個の素点以外で，$\pi_v\cong\pi_v'$ となるとき，$\pi=\pi'$ で，$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ の中で $H=H'$ となる．∎

もう一方の大域的 Weil 群を考える．$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$の元で定数体 $\bar{k}$ に $\chi\mapsto\chi q^n (n\in\boldsymbol{Z})$という形の自己同型を引き起すものからなる部分群を W_K と書く．これを K の Weil 群と呼ぶ．各素点 v に対して $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)\to\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$は，$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$での共役を除いて自然に定まり，これは $W_{K_v}\to W_K$ という準同型を引き起す．W_K の有限次表現 $\rho: W_K\to GL_n(\Omega)$は ρ の W_{K_v} への制限 ρ_v が不分岐であるとき，v で不分岐であるという．ρ が v で不分岐であるとき $\rho(Fr_v)$は共役を除いて一意に定まる．一般に $\rho: W_K\to GLn(\Omega)$に対し，有限個の素点からなる除外集合 S があって，$v\notin S$ のとき ρ は v で不分岐になる．W_K の２つの n 次表現 $\rho, \rho': W_K\to GLn(\Omega)$に対して，$\rho$ と ρ' の各々の除外集合 S と S' とを含む除外集合 S'' があって，$v\notin S''$ に対し $\rho(Fr_v)$と $\rho'(Fr_v)$が共役であるとき，ρ と ρ' は同値な表現となる．

$(W_K)^{\wedge}_2$ で W_K の２次の既約表現 $W_K\to GL_2(\Omega)$の同値類のなす集合を表わす．

Langlands 予想． 集合 $GL_2(\boldsymbol{A})^{\wedge}_{\mathrm{cusp}}$ と$(W_K)^{\wedge}_2$ とには次をみたす１対１対応 $\varphi: \pi\sim\rho$ がある．

$GL_2(\boldsymbol{A})^{\wedge}_{\mathrm{cusp}}$ の各元 π に対して，素点の有限集合 S で，π と ρ とは S の外では不分岐で，各 $v\notin S$ に対して π_v と ρ_v とは v における局所 Langlands 対応 $\pi_v \underset{v}{\sim} \rho_v$ がある．これは又 v において L-関数の Euler 因子に対して，$L\left(s-\frac{1}{2}, \pi_v\right)=L(s, \rho_v)$ が成立するといってもよい．∎

Drinfel'd はまず保型表現 π から出発して，対応する W_K の表現 ρ をつくる方法を elliptic modules, F-sheaves (shutka とも FH-sheaves ともいう)を使って見い出した(cf. [1-a〜1-j])．その後，逆に ρ から出発して πの存在を示す部分が見い出され，上の予想は解決した(cf. [2-a], [2-b])．

（2） 保型表現から Galois 表現へ(その 1)．

この節では楕円加群を使って保型表現から Galois 表現を得る最初の方法を Drinfel'd の論文 [1-a], [1-d] に沿って述べる．[1-a] の結果は Deligne-Husemöller の解説の方がより行き届いて完全に扱われている(cf. [D-H])．

K を前節のように有限体 $\boldsymbol{F}_q$ 上の一変数代数関数体とし，K の素点をひとつ固定し，それを ∞ と書く．K の部分環 $A=\{x\in K|x$ は ∞ 以外の任意の素点 v で整$\}$を考える．A は Dedekind 環で分数体は K である．

古典的な楕円 modular 曲線の類似物をまず K 上に構成することを問題にする．これは古典的な場合は楕円曲線の moduli 空間として定義されたが，関数体の場合は楕円 A- 加群の moduli 空間として構成される．以下楕円 A- 加群の定義を思い出す．直観的に理解し易い，解析的な場合から始めよう．

(2-1) 楕円 A- 加群．解析的に．

K の ∞ での完備化 K_∞ の閉包 $\bar{K}_\infty$ の完備化を C_∞ と書く．C_∞ の加法群の部分加群 L で任意の球 $B(a, r)=\{x\in C_\infty||x-a|<r\}$ に対して，共通部分 $L\cap B(a, r)$が有限集合となるものを格子という．格子 $\Gamma\subset C_\infty$ が，任意の $a\in A\subset C_\infty$ に対して $a\Gamma\subset\Gamma$ を満たすとき，それは自然に A- 加群となり，このとき Γ を A- 格子という．A- 格子 Γ に対し，その指数関数 $e_\Gamma(t)$ $(t\in C_\infty)$を，

$$e_\Gamma(t) = t\prod_{\gamma\in\Gamma-\{0\}}\left(1-\frac{t}{\gamma}\right)$$

で定義する．e_Γ は $e_\Gamma(x+y)=e_\Gamma(x)+e_\Gamma(y)$ $(x, y\in C_\infty)$を満たす．

さらに完全列 $0\longrightarrow\Gamma\longrightarrow C_\infty\xrightarrow{e_\Gamma} C_\infty\longrightarrow 0$ を引き起す．これより，C_∞/Γ の A- 加群の構造を C_∞ に転移できる．こうして得られる，C_∞ の新しい A- 加群としての構造を $\phi^\Gamma: A\to\mathrm{End}(C_\infty)$と書く．これを代数的にみて次の小節の楕円 A- 加群の定義を得る．

注意． 古典的な場合の類似を言えば，A が $\boldsymbol{Z}$ に，K が $\boldsymbol{Q}$ に C_∞ が $\boldsymbol{C}$ に，e_Γ は楕円関数に相当する．

(2-2)　楕円 A- 加群．代数的に．

Rを標数pの環とする，即ち$pR=\{0\}$. このときR上の加法群$\boldsymbol{G}_a$はp乗準同型$\tau: x\in\boldsymbol{G}_a\mapsto x^p\in\boldsymbol{G}_a$と，$R$の各元$a$に対して$a: x\in\boldsymbol{G}_a\mapsto ax\in G_a$を$\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)$の元としてもつ．$\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)$の中で a と τは，$\tau\cdot a=a^p\cdot\tau$という交換関係を満たす．環$R\{\tau\}$をR係数のτの非可換多項式環で上の交換関係を満たすものとする．Rが体のとき$\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)=R\{\tau\}$. 以下$R$は体とする．

$R\{\tau\}=\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)$の元$a_0+a_1\tau+\cdots+a_n\tau^n=f(\tau)$ $(a_n\neq 0)$に対して，$\deg f=p^n$として，$\deg: \mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)\to\boldsymbol{Z}$を定める．$a\in K$に対して，$|a|_\infty$で$a$の$\infty$での正規化された絶対値とする．

定義． 自然数$r>0$に対して，体R上の階数rの楕円A- 加群とは単射環準同型$\phi=A\to\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)$で，$\deg(\phi(a))=|a|_\infty^{\zeta}=(\mathrm{Card}(A/a))^r$が任意の$a\in A(a\neq 0)$に対して成立するものをいう．

注意． 創始者の名前をとって，楕円A-加群はDrinfel'd加群とも呼ばれる．

(2-3)　modular 曲線．

さて楕円A- 加群に対しては，楕円曲線と同じく同種や，AのイデアルIに対してI- 分点を定義できる．さて$\boldsymbol{G}_a$の接空間に$\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)$の元を誘導して$\partial$: $\mathrm{End}_R(\boldsymbol{G}_a)\to\mathrm{End}(R)=R$という環準同型を得る．$\partial\circ\phi: A\to R$が単射であるとき，楕円加群$\phi$の標数は$\infty$であるという．以下標数$\infty$のもののみ考える．すると階数$r$の楕円$A$- 加群$\phi$の$I$- 分点${}_I\phi$は階数$r$の自由$A/I$- 加群である．

さらに一般化して，標数pの任意の概型S上の楕円A- 加群も定義でき，そのlevel-I構造も定義できる．こうして，古典的な楕円曲線の場合と同様に，A上の概型M_I^rで階数r, level-Iの楕円A- 加群をパラメトライズするmoduli空間ができる．しかもM_I^rのC_∞値の点全体$M_I^r(C_\infty)$は射影空間$\boldsymbol{P}^{r-1}(C_\infty)$から，$K_\infty$上有理的な超平面を除外した部分集合$\Omega^r(C_\infty)$の$\Gamma(I)=\{g\in GL_r(A)\mid g\equiv 1_r(\mathrm{mod}\ I)\}$による商$\Gamma(I)\backslash\Omega^r(C_\infty)$と自然に同一視される．$r=2$のとき$\Omega^2(C_\infty)=\boldsymbol{P}^1(C_\infty)-\boldsymbol{P}^1(K_\infty)=C_\infty-K_\infty$は古典的な場合の$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}$の類似と考えられる．$M_I^r$は$A$上$(r-1)$次元の概型で特に$r=2$のとき曲線になる．$M_I^r\otimes_A K$も単に$M_I^r$と記す．さらに以下$r=2$として，$M_I^2$を単に$M_I$と書く．

(2-4)　Cohomology 群と基本的な双表現．

K上の曲線M_Iのétale cohomology群$H^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)$を考える．これには$GL_2(A/I)$が$M_I$に対する作用を通して，$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$が$\otimes_K\bar{K}$を通して作用していて，これらは互いに可換である．いま$H_!^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)$を$H^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)$の中で，compact supportをもつcocycleで代表されるものからなる部分空間とすると，これは$GL_2(A/I)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$部分加群になる．$J$を$J\subset I$なるイデアルとすると，自然な有限全射$M_J\to M_I$があり，$H_!^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)\to H_!^1(M_J\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)$という単射で$GL_2(A/J)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$の作用と両立する線型写像がある．$J$をどんどん小さくして，極限をとると，$\varprojlim M_I$には$\varprojlim GL_2(A/I)=\prod_{v\neq\infty}GL_2(\mathcal{O}_v)$が連続に作用するが，さらに$GL_2(K)$も$GL_2(A)$の作用を延長するように働く．それ故$GL_2(\boldsymbol{A}_f)=GL_2(K)\cdot\prod_{v\neq\infty}GL_2(\mathcal{O}_v)$が$\varprojlim M_I$に，従ってcohomology $\varinjlim_I H_!^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \boldsymbol{Q}_l)$にも作用する．$\mathcal{H}=\varinjlim_I H_!^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$とおくと，$\mathcal{H}$は$GL_2(\boldsymbol{A}_f)$と$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$の双表現(bi-representation)になっている．

まず$GL_2(K_\infty)$の既約admissible表現で中心指標が自明で離散系列に属し，absolutely cuspidalでないものが唯一である．これをspecial表現といい，(σ_{sp}, V_{sp})と書く．他方$\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$の素元$t_\infty$を使って得られるKummer拡大$\mathrm{Gal}(K_\infty(\sqrt[l^n]{t_\infty})/K_\infty)$ $(n\geqq 1)$に対応する$\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$の2次元の表現

$$W_\infty^*: \mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)\ni\sigma\longmapsto\begin{pmatrix}1, & \chi(\sigma)\\ 0, & \chi_l(\sigma)\end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$\chi_l(\sigma)$は円分指標で，$\sigma(\sqrt[l^n]{t_\infty})=\zeta_{l^n}^{\kappa(\sigma)}\cdot\sqrt[l^n]{t_\infty}$.

このとき$H_!^1(M\otimes_K\bar{K}_\infty, \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$への$\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$の作用は$W_\infty^*$の反傾表現$W_\infty$で与えられる．さらに$V_{sp}$から$GL_2(\boldsymbol{A}_f)\times GL_2(K_\infty)$加群$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}=\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(GL_2(K)\backslash GL_2(\boldsymbol{A}))$へのintertwining space

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(K_\infty)}(V_{sp}, \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}})$$

は$GL_2(\boldsymbol{A}_f)$の表現となるが，このとき次が成立する．

定理(2.1). $GL_2(\boldsymbol{A}_f)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$加群として，$\varinjlim_I H_!^1(M_I\otimes\bar{K}_\infty, \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$は$\mathrm{Hom}_{GL_2(K_\infty)}(V_{sp}, \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}})\otimes W_\infty$に同型である(cf. [1-a], Prop. 10. 3).

この定理の証明は原論文[1-a]より[D-H]の方が丁寧である．いずれにせよ，これより$\mathcal{H}=\varinjlim_I\mathcal{H}_!^1(M_I\otimes_K\bar{K}, \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$は，

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}=\bigoplus_{\pi\in\Pi}\pi\quad(\text{各}\ \pi\ \text{は}\ \pi=\bigotimes_v\pi_v)$$

と既約分解する時，$GL_2(\boldsymbol{A}_f)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$加群として

$$\bigoplus_{\pi\in\Pi,\pi_\infty=\sigma_{sp}}[(\bigotimes_{v\neq\infty}\pi_v)\otimes W_\infty]$$

に同型となる．但し $\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$ は $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の中で ∞ の分解群とみる．

さて $\pi\in\Pi$ で $\pi_\infty=\sigma_{sp}$ というものをとると，上より $\mathrm{Hom}_{GL_2(\boldsymbol{A}_f)}((\bigotimes_{v\neq\infty}\pi_v), \mathcal{H})\cong\bar{\boldsymbol{Q}}_l^{\oplus 2}$ で，これは $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-加群で $\mathrm{Gal}(\bar{K}_\infty/K_\infty)$ に制限すると W_∞ になっている．これを $\rho(\pi)$ と書くと，$\mathcal{H}$ は $GL_2(\boldsymbol{A}_f)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 加群として $\bigoplus_{\pi\in\Pi,\pi_\infty=\sigma_{sp}}[(\bigotimes_{v\neq\infty}\pi_v)\otimes\rho(\pi)]$ と同型になる．

さて上のような π に対して不分岐な素点 v をえらぶと次が成立する．

定理(2.2)． v において π_v が不分岐ならば，$\rho(\pi)_v$ も不分岐で，局所的な L-因子の間に $L\left(s-\frac{1}{2},\pi_v\right)=L(s,\rho(\pi)_v)$ という関係が成立する．

証明は古典的な場合と全く同様に，合同関係式を用いて行なわれる．合同関係式の証明の詳細は原論文にも，[D-H] にもない．Gekeler[Gek] が詳しい．

Drinfel'd はさらに [1-d] の中で，$\varprojlim M_I^r$ のある被覆 $\varprojlim\tilde{M}_I^r$ で，K_∞ 上の不変量 $-1/d$ の中心的可除多元環 D の乗法群 D^* が作用するようなものを構成し，これの étale cohomology 群を考えて $GL_r(\boldsymbol{A}_f)\times D^*$ と $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の $H^1(\varprojlim_I\tilde{M}_I^r\otimes_K\bar{K}, \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$ 上の双表現を得ている．$r=2$ のとき，これを $GL_2(\boldsymbol{A}_f)\times\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ に制限して，$GL_2(\boldsymbol{A}_f)$ の表現たち π_f と $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の表現たち ρ とによって，$\bigoplus\{\pi_f\otimes\rho\}$ と既約分解し，ρ は π_f によって一意に定まること，また π_f は $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ の既約成分 $\pi=\bigotimes_v\pi_v$ で π_∞ が離散系列に属し，中心指標が自明であるようなものの'有限成分' $\bigotimes_{v\neq\infty}\pi_v$ たちとして得られることを示している．$\rho=\rho(\pi)$ が π に対応する Galois 表現である．証明は Ihara[Iha] や Langlands[Lan] にあるように moduli 空間の reduction の有限体上の有理点を算術的にパラメトライズし，Selberg の跡公式を用い (cf. [J-L]), [Lan] の方針と同様に行なわれている．Weil の Riemann 予想の結果を使い，Selberg の跡公式を完全に計算しきらないですませる工夫がなされている．

[1-a], [1-d] の GLn への一般化が Flicker-Kazhdan [F-K] によって論じられている．但し，Deligne のある予想を仮定する．

(3)　保型表現から Galois 表現へ(その2)．

前節の方法では取り扱える保型表現に ∞ での成分が離散系列であるという条件があった．これをなくすことが次の目標である．これは [1-e] に announce され Helsinki の congress で証明に必要な諸定義や命題が提示された ([1-f])．Kazhdan[Kaz] と Harder-Kazhdan[H-K] によって証明の key point が説明された．本人によるもっと詳細な論文は，ここ2,3年の間に出た3部作 [1-h], [1-i], [1-j] である．これを少し説明する．

さて一般の場合に望ましいのは，$GL_2(\boldsymbol{A})$ と $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ (あるいは大域的 Weil 群 W_K) とが互いに可換に作用する大きな空間 H が構成できて，この中で Langlands 予想の対応が得られることである．しかし Kazhdan[Kaz] に説明してあるように，これは原理的に不可能であることがわかる．Drinfel'd はこれに替えて，$GL_2(\boldsymbol{A})\times W_K\times W_K$ の表現を以下のように構成した．

(3-1)　$\boldsymbol{F}$-層とその moduli.

X を関数体 K の $\boldsymbol{F}_q$ 上の非特異射影モデルとする．$\boldsymbol{F}_q$ 上の概型 S に対して，Fr_s で S の $\boldsymbol{F}_q$ 上の Frobenius 準同型とする．以下概型の積は $\boldsymbol{F}_q$ 上で考える．

定義． S を $\boldsymbol{F}_q$ 上の概型とする．S 上の階数 d の左(右) F-層とは，階数 d の $\mathcal{O}_{X\times S}$-加群の局所自由層 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{L}$ の図式

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \\ \mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & (\mathrm{id}_X\times F_{rs})^*\mathcal{L} \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[dr, "g"] & \\ & \mathcal{F} \\ (\mathrm{id}_X\times F_{rs})^*\mathcal{L} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}\right)$$

で，i と j とは共に単射で，Coker i はある型射 $\alpha: S\to X$ のグラフ Γ_α 上の可逆層の直像で，Coker i もある型射 $\beta: S\to X$ のグラフ Γ_β 上の可逆層の直像であるものをいう．右 F-層のときも f, g を単射として同様の条件を付ける．α, β を各々 F-層の零と極という．

さて $D\subset X$ の有限部分概型とし，F-層の零や極とは交わらない，つまり α, β は $S\to X-D$ という型射とするとき $\mathcal{L}$ の $D\times S$ への制限を $\mathcal{L}_D$ と書く．F-層の定義から自然に同型 $(\mathrm{id}_D\times F_{rs})^*\mathcal{L}_D\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_D$ を得る．

定義． F-層 $\mathcal{L}$ 上の level D 構造とは，同型 $h: \mathcal{L}_D\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{D\times S}^d$ で

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{id}_D\times F_{rs})^*\mathcal{L}_D \arrow[rr, "(\mathrm{id}_D\times F_{rs})^*h", "\sim"'] \arrow[dr, "\wr"'] & & \mathcal{O}_{D\times S}^d \\ & \mathcal{L}_D \arrow[ur, "\sim", "h"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものをいう．

各概型 S に level D 構造をもつ右(左) F-層の同型類を対応させる反変関手は coarse moduli scheme をもつ．これを $M_{D,d}$ $({}_{D,d}M)$ と書く．$M_{D,d}$ は局所的に有限型である (cf. [1-f] の§3)．さらにこの上に $GL_d(A_D)$ が自然に作用する．但し A_D は D の座標環．

$M_d=\varprojlim_D M_{D,d}({}_dM=\varprojlim_D {}_{D,d}M)$ とおくと，これには $GL_d(\boldsymbol{A})/K^*$ が作用する．M_d は Spec $K\otimes K=\varprojlim_D (X-D)^2$ 上の概型である．

さて各 F-層に対してその零とその極を対応させて，2つの型射 $M_{D,d}\to X-D$ と ${}_{D,d}M\to X-D$ を得る．積を考えて $M_{D,d}\to(X-D)^2$ を得る．以下 $d=2$ とすると，M_d は2次元となる．

さらに [1-j] では一般化された F-層という概念を定義し上の M_2 をコンパクト化して，$\bar{M}_2$ を得ている．

(3-2)　基本的な双表現と主定理

$X\times X$ の関数体 Λ を考えてその分離閉包 Λ_s を考えるとき，$\bar{M}_2\to$Spec $K\otimes K$ の generic geometric fibre $\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda}$ の cohomology 群 $H^i(\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$ には $GL_2(\boldsymbol{A})$ と Gal$(\bar{\Lambda}_s/\bar{\Lambda})$が作用している．$\Lambda$ は $K\otimes K$ の商体であるので自然な準同型 Gal$(\Lambda_s/\Lambda)\xrightarrow{\mu}Gal(\bar{K}/K)\times$Gal$(\bar{K}/K)$に注目して，Gal$(\Lambda_s/\Lambda)$の作用をひねって Ker μ が cohomology に自明に作用するようにする．こうして次の基本的な構成を得る．

定理． $H^i(\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$ は $GL_2(\boldsymbol{A})\times W_K\times W_K$ の表現を与える．

ここで問題になるのは，$H^i(\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)=\mathcal{H}^i$ で自明でない部分である $i=2$ のとき，$\mathcal{H}^2$ は $GL_2(\boldsymbol{A})$の表現として，離散的な直和に分解せず連続スペクトラムの部分を含むことである．この部分を記述するものとして Drinfel'd は horospherical curves というものを曲面 $\bar{M}_d$ の中で定義し([1-h], § 4)，これの cycle map による $\mathcal{H}^2$ の中での像たちが 'Eisenstein classes' $\mathcal{H}^2_{\text{Eis}}$ を生成していることを示している．[1-j] の結果をまとめる．

主定理． (i) $H^1(\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)=H^3(\bar{M}_2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)=\{0\}$.
(ii) $H^2(\bar{M}^2\otimes\bar{\Lambda},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_l)$ は $\mathcal{H}^2_{\text{Eis}}$ と $\mathcal{H}^2_{\text{cusp}}$ との $GL_2(\boldsymbol{A})\times W_K\times W_K$ の部分表現の直交直和に分かれ，$\mathcal{H}^2_{\text{cusp}}$ は $GL_2(\boldsymbol{A})\times W_K\times W_K$ の表現として $\bigoplus_\pi(\pi\otimes\rho(\pi)\otimes\rho(\check{\pi}))$ に同型である．ここで π は $\mathcal{A}_{\text{cusp}}$ の既約部分表現を動き，$\check{\pi}$ は π の反傾表現で，$\rho(\pi)$は Langlands 予想で π に対応する W_K の2次元の表現である．

証明は Selberg 跡公式を用いて行なわれる．$W_K\times W_K$ の中で素点 v と w に対応する Frobenius のべき$(F^i_v,\ F^j_w)$と $GL_2(\mathcal{O}_v)$の特性関数 Φ を考え，$GL_2(\boldsymbol{A})\times W_K\times W_K$ の群環の元 $\Phi(F^i_v,\ F^j_w)$の $\mathcal{H}^2_{\text{cusp}}$ への直交射影 $pr_{\text{cusp}}(\Phi(F^i_v,\ F^j_w))$の跡と [1-i] の § 3 で定義する別の test 関数 $\Phi^{i,j}_{v,w}$ の $\mathcal{A}_{\text{cusp}}$ 上での跡とが等しいことを示す([1-j] の式(7.1))：

$$(\#)\quad \mathrm{Tr}(pr_{\text{cusp}}\,\Phi(F^i_v,\ F^j_w)\,;\ \mathcal{H}^2{}_{\text{cusp}}) = \mathrm{Tr}(\Phi^{i,j}_{v,w},\ \mathcal{A}_{\text{cusp}}).$$

左辺は $\mathcal{H}^2$ 上の跡から $\mathcal{H}^2_{\text{Eis}}$ 上の跡を引いた差である．$\mathcal{H}^2_{\text{Eis}}$ は GL_1 の言葉で記述できる．Tr$(\Phi(F^i_v,\ F^j_w)\,;\ \mathcal{H}^2)$は Lefschetz 固定点定理によって，$\bar{M}_2$の geometric points 上の和として書き替えられる．他方 geometric points の集合は Deuring, Honta-Tate 理論の類似物を使って，軌道空間として記述される([1-i] の Th. 2. 9)．これは古典的場合の Ihara [Iha] や Langlands [Lan] の議論と同様である．

こうして軌道空間の特性関数を，うまくテスト関数を選んで，それの軌道積分として表わす．こうして Selberg 跡公式の軌道積分の辺が得られる．これを Tr$(\Phi^{i,j}_{v,w},\ \mathcal{A}_{\text{cusp}})$の跡公式の軌道積分の辺と比較して(#)が得られる．全体の議論は [Lan] に近いが連続スペクトラムの項もある分だけより複雑になる．

この節の部分は Harder-Kazhdan ([K], [H-K])が参考になる．

(2)の楕円 A加群と F-層の関係は自明でない．[1-c] の結果を使って対応をつくる．[1-h] の最初に説明がある．[1-c] の結果は Krichever の仕事の類似で思い付いたようである．

(4)　l 進表現から保型表現へ．

この逆の方向は2つの論文 [2-a] と [2-b] とで論じられた．まず主定理を述べる．標数 $p>0$ の大域体 K の Weil 群 W_K の2次元の既約な l 進表現 ρ: $W_K\to GL_2(\bar{\boldsymbol{Q}}_l)$で l 進位相に関して連続で，$\boldsymbol{Q}_l$ のある有限次拡大 E を通して $W_K\to GL_2(E)\to GL_2(\bar{\boldsymbol{Q}}_l)$と分解し有限個の素点のみで分岐するものの同値類を$(W_K)^\wedge_2$ と書く．

主定理． $(W_K)^\wedge_2$ の各元 ρ に対して，ρ に Langlands 予想の意味で対応する尖点的保型表現 $\pi\in GL_2(\boldsymbol{A})^\wedge_{\text{cusp}}$ が存在する．

存在すれば，強重複度1定理より，π は一意に定まる．

証明はまず [2-a] で，ρ が全ての素点で不分岐の場合に行なわれ，[2-b] で一般の場合が扱われている．証明の議論の大筋は同じである．以下全ての素点で不分岐のときを説明する．

(4-1)　幾何的な言葉への言い替え．

ρ に対応する π が存在すれば，各 v に対して，$L(s,\rho_v)=L\left(s-\frac{1}{2},\ \pi_v\right)$より，$\pi_v$ も全て不分岐でなければならないので局所的な表現は自動的に定まってしまう．問

題は $\bigotimes_v \pi_v$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ の部分空間で実現されるかどうかということである．もしそうならば $f\in\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}$ で，$\bigotimes_v \pi_v$ に属し，全ての素点 v で同時に $GL_2(\mathcal{O}_v)$-不変となる元が存在し，定数倍を除いて一意に定まる．

f の Fourier 展開

$$f(x)=\sum_{a\in K^*} W_{h_f}\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x\right)\quad (x\in GL_2(\boldsymbol{A}))$$

を考える．ここで adele 群の自明でない連続加法指標 $\psi:\boldsymbol{A}/\mathrm{K}\to\bar{\boldsymbol{Q}}_l^*$ をひとつ固定し，大域的 Whittaker 関数 Wh_f を

$$Wh_f(x)=\int_{\boldsymbol{A}/K} f\left(\begin{pmatrix} 1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}x\right)\psi(-x)dx$$

で定める．

Wh_f は局所的な Whittaker 関数 $Wh_{f,v}$ の積 $Wh_f=\prod_v Wh_{f,v}$ で書け，各 $Wh_{f,v}$ は次の explicit な表示をもつ．$\det(\rho):W_K\to\bar{\boldsymbol{Q}}_l^*$ に類体論で対応する $GL_1(\boldsymbol{A})$ の指標を ω' とし，$\omega=|\cdot|\omega'^{-1}$ とおく．但し $|\cdot|$ は $|x|=\prod_v|x_v|_v$ $(x=(x_v)\in\boldsymbol{A}^*)$．このとき，

$$Wh_{f,v}\left(\begin{pmatrix} 1 & z_v\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_v & 0\\ 0 & b_v\end{pmatrix}\right)$$
$$=\psi_v(z_v)\cdot\left|\frac{a_v}{b_v}\right|_v\omega_v(b)c_v(\mathrm{ord}_v\, a-\mathrm{ord}_v\, b+\mathrm{ord}_v\,\delta)$$

但し，ここで ψ が自明な $\boldsymbol{A}$ の中の極大 $\prod_v\mathcal{O}_v$-加群を $(\prod_v\mathcal{O}_v)u\ (u\in\boldsymbol{A})$ とするとき，$\delta=-\mathrm{div}\, u$ とおき，また $(1-\mathrm{tr}(\rho(F_{r_v}))z+\det(\rho(F_{r_v}))z^2)^{-1}$ の z に関する形式巾級数展開の z^n の係数を $C_v(n)$ とする．$n<0$ のとき，$C_v(n)=0$ とおく．

こうして f は存在すれば，Iwasawa 分解 $x=\begin{pmatrix} 1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\prod_v k_v\ (k_v\in GL_2(\mathcal{O}_v))$ によって $GL_2(\boldsymbol{A})$ 上の右-$\prod_v GL_2(\mathcal{O}_v)$ 不変な関数として一意に定まる．$B=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in GL_2(K)\right\}$ とおくと定義より f は左-B 不変である．よって f は両側剰余類 $B\backslash GL_2(\boldsymbol{A})/\prod_v GL_2(\mathcal{O}_v)$ 上の関数である．f が保型的であることを示すためには，さらに左-$GL_2(K)$ 不変を示せばよい．

ところで，$GL_2(K)\backslash GL_2(\boldsymbol{A})/\prod_v GL_2(\mathcal{O}_v)$ は X 上の階数 2 の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の同型類と 1 対 1 に対応し，$B\backslash GL_2(\boldsymbol{A})/\prod_v GL_2(\mathcal{O}_v)$ は階数 2 の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{L}$ とその中の可逆部分層 $\mathfrak{a}$ の組み $(\mathcal{L},\mathfrak{a})$ と 1 対 1 に対応する．それ故 f は組み $(\mathcal{L},\mathfrak{a})$ 上定義された関数 $f(\mathcal{L},\mathfrak{a})$ と見做せ，これが $\mathfrak{a}$ に依らないことが示されればよい．

幾つかの補題によって，$\mathcal{L}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_q$ の剰余可逆層の最小の次数を $h(\mathcal{L})$ とする時，$\mathfrak{a},\mathfrak{a}'$ について $\deg\mathfrak{a}\ll h(\mathcal{L})$, $\deg\mathfrak{a}'\ll h(\mathcal{L})$ の時，$f(\mathcal{L},\mathfrak{a})=f(\mathcal{L},\mathfrak{a}')$ が示されればば f は $\mathfrak{a}$ に依らない事が示されるという事がわかる．

(4-2)　サイクルの消滅定理への帰着

$\bar{V}_n$ を $\mathcal{L}$ の中の次数 n の可逆部分層の moduli 空間，V_n を $\mathcal{L}$ の中の次数 n の可逆極大部分層に対応する開部分とする．$m=\deg\mathcal{L}-2n+2g-2$ とおく．このとき $\nu_n:\bar{V}_n\to\underline{\mathrm{Pic}}^m X$ を $\mathfrak{a}\in\bar{V}_n$ に $\mathfrak{a}^{\otimes(-2)}\otimes\bar{\Omega}\otimes\det\bar{\mathcal{L}}\in\underline{\mathrm{Pic}}^m(X\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_q)$ を対応させる写像とする．ここで $\bar{\Omega}$ は $X\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_q$ の標準層で $\underline{\mathrm{Pic}}^m X$ は X 上の次数 m の層の Picard 概型である．

デカルト正方形

$$\begin{array}{ccc}\bar{\mathcal{P}}_n & \xrightarrow{\bar{\pi}_n} & \bar{V}_n\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_n}\\ \mathrm{Sym}^m X & \xrightarrow{\mathrm{Jac}} & \underline{\mathrm{Pic}}^m X\end{array}$$

によって $\bar{\pi}_n$ と $\bar{\mathcal{P}}_n$ を定める．但し $\mathrm{Sym}^m X$ は X の m 次対称積で Jac は因子に対応する可逆層を考える写像である．W_K の表現 ρ より X 上に対応する局所定数層 $\mathcal{E}$ が存在し，これより $\bar{\mathcal{P}}_n$ にもある étale 層 $\mathcal{F}_n$ が導かれる．

Lefschetz 固定点定理を用いて，$\mathfrak{a}$ が $\mathcal{L}$ の極大可逆層で次数 n であるとき，$\mathfrak{a}$ に対応する V_n の $\boldsymbol{F}_q$-点を u とすると，

$$f(\mathcal{L},\mathfrak{a})=q^{1+\deg\mathfrak{a}}\omega(\det\mathcal{L})^{-1}\omega(\mathfrak{a})\sum_j(-1)^j$$
$$\cdot\mathrm{Tr}(Fr_u R^j(\pi_n)_*\mathcal{F}_n)$$

という様に，$f(\mathcal{L},\mathfrak{a})$ は étale cohomology 群への Frobenius の作用の跡で書き表わされる ([1-a], Prop. 2. 4)．

ここで étale cohomology 群の消滅に関する Deligne の結果等を駆使して，$R^j(\pi)_*\mathcal{F}_n$ が $\bar{V}_n$ まで局所定数層として延びることを示す．これよりこの層は $\bar{V}_n\longrightarrow\underline{\mathrm{Pic}}^n X$ によって $\underline{\mathrm{Pic}}^n X$ 上の局所定数層 $\mathcal{M}_n^j$ の原像になることがわかる (p. 98)．

n がちがう時の $\mathcal{M}_n^j$ の間の関係から，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ とが $\mathcal{L}$ のそれぞれの次数 m と n の可逆極大部分層であって，$u\in\underline{\mathrm{Pic}}^n X$ と $v\in\underline{\mathrm{Pic}}^n X$ が対応する点である時，等式

$$q^m\omega(u)\mathrm{Tr}(Fr_u,\mathcal{M}_m^{j-2m})=q^n\omega(v)\mathrm{Tr}(Fr_v,\mathcal{M}_n^{j-2n})$$

が，$\deg\mathfrak{a}<h(\mathcal{L})-2g$ かつ $\deg\mathfrak{a}'<h(\mathcal{L})-2g$ の下で示される．

一方

$$f(\mathcal{L},\mathfrak{a})=q^{1+\deg\mathfrak{a}}\omega(\det\mathcal{L})^{-1}\omega(\mathfrak{a})\sum_j(-1)^j$$
$$\cdot\mathrm{Tr}(Fr_u,\mathcal{M}_n^j)$$

であるので，$f(\mathcal{L},\mathfrak{a})=f(\mathcal{L},\mathfrak{a}')$ が言える．

(4-3)　別証明等について

Weil 群の表現 $\rho\in(W_K)^\wedge_2$ がひとつの l での l 進表現でなく，強い意味の両立系から来ている時，Deligne [Del] が L-関数の Grothendieck による関数等式の ε 因子は，局所的 ε 因子の積になることを示している．これと Converse Theorem (cf. [J-L]，ρ の $\chi: W_K\to\bar{\boldsymbol{Q}}_l^*$ による twist $\rho\otimes\chi$ の L 関数たちも関数等式をもてば，その L-関数は保型形式から得られるという定理) を合わせて，対応する保型表現 π の存在が言える．Laumon [Lau] は，ひとつの l についての l 進表現から出発して大域的な ε 因子が局所的なものの積になる事を示した．よって ρ から π の構成はこれによっても可能になる．

Drinfel'd の証明は Converse Theorem を使わないのが利点のひとつと考えられていた．$GL_r(r\geqq 3)$ のとき寺杣や Laumon によって一般化が試みられているが消滅定理周辺の部分が大変難かしいようである．

(5)　文献表について．

数字とアルファベットの付いているものが Drinfel'd のものである．他は他の人による関連論文である．文献表を作るのに，田口雄一郎・浜畑芳紀両君の助力を得た．記して感謝したい．

文　　献

[1-a] Elliptic modules, Math. USSR-Sb., **23** (1974), 561-592.

[1-b] Coverings of p-adic symmetric regions, Funct. Anal. and its appl., **10**(1976), 107-115.

[1-c] Commutative subring of certain non-commutative ring, Funct. Anal. and its appl., **11**, nol. 1 (1997), 9-12.

[1-d] Elliptic modules II, Math. USSR-Sb., **31** (1977), 159-170.

[1-e] Proof of the global Langlands conjecture for $GL(2)$ over a function field, Funct. Anal. and its appl., **11**, No. 3 (1977), 223-225.

[1-f] Langlands conjecture for $GL(2)$ over function fields., Proc. of ICM (Helsinki, 1978), vol. 2, 565-574.

[1-g] Number of two dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field, Funct. Anal. and its appl., **15**, No. 4 (1981), 294-295.

[1-h] Varieties of modules of F-sheaves, Funct. Anal. and its appl., **21**, No. 2 (1987), 107-122.

[1-i] Proof of Petersson's conjecture over a global field of characteristic p, Funct. Anal. and its appl., **22**, No. 1 (1988), 28-43.

[1-j] Cohomolgy of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2, J. of Soviet Math., **46** (1989), 1789-1821.

[2-a] Two dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on $GL(2)$, Amer. J. Math., (1983), 85-114.

[2-b] Two dimensional l-adic representations of the Galois group of a global field of characteristic p and automorphic forms on $GL(2)$, J. of Soviet Math., **36**, No. 1 (1987), 93-105.

[3-a] Two theorems on modular curves, Funct. Anal. and its appl., **7** (1973), 155-156.

[3-b] (with S. G. Vlâdut), Number of points of an algebraic curves, Funct. Anal. and its appl., **17** (1983), 53-54.

[Del] Deligne, P., Les constantes des equations fonctionnelles de fonction L, Lecture Notes in Math., No. **349** (1973), 501-597, Springer-Verlag, New York.

[D-H] Deligne, P. and Husemöller, D., Survey of Drifel'd modules, in 'Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry', Comtemp. Math., **67** (1987), 25-91.

[F-K] Flicker, Y. and Kazhdan, D., Geometric Ramanujan Conjecture and Drinfel'd Reciprocity Law, in 'Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups' (1989), 201-218, Academic Press.

[Gek] Gekeler, E.-U., Über Drinfeld'sche Modulkurven vom Hecke-Typ, Compositio math., **57** (1986), 219-236.

[H-K] Harder, G. and Kazhdan, D., Automorphic forms on GL_2 over function fields, Automrphic forms, representations, and L-functions, Proc. of symp. in pure math., **33**-II (1979), 357-379.

[Iha] Ihara, Y., Hecke polynomials as congruence ζ-functions in elliptic modular case, Ann. of Math., **85** (1967), 72-100.

[J-L] Jacquet, H. and Langlands R. P., 'Automorphic Forms on GL(2),' Lecture Notes in Math. 114, Springer-Verlag, 1970.

[Kaz] Kazhdan, D., An introduction to Drinfeld's 'Shutka', Automrphic forms, representations, and L-functions, Proc. of symp. in pure math., **33**-II (1979), 347-356.

[Lan] Langlands R. P., Modular forms and l-adic representations, Lecture Notes in Math., **349** (1973), 361-500, Springer-Verlag, New York.

[Lau] Laumon, G., Transformation de Fourier constantes d'equationns fonctionnelles et conjecture de Weil, Publ. Math. I. H. E. S., **65** (1987).

（おだ　たかゆき・京都大学数理解析研究所）

V. G. Drinfel'd 氏の業績 II

神 保 道 夫

Drinfel'd は数理物理学においても，ソリトン・インスタントンなどの古典系と，量子群・共形場理論などの量子系の双方にわたる可積分系の分野で，著しい業績をあげています．これらの仕事はそれぞれが大変重要なものですが，とりわけ量子逆散乱法から構想された量子群の理論は，可積分系という一分野の枠を越えた数学の世界に，深い影響力をもって現在も浸透しつつあるように見えます．

ソ連で出版される論文が多くそうであるように，Drinfel'd の論文は記述が極めて凝縮され，その意味では決して読みやすいものではありません．しかしそれらを繙く読者は，可積分系の背後に隠れた数学的構造を見抜く炯眼と，それを正しい枠組みにまとめる構成力，そして徹底した結果にまで至る並々ならぬ力量に感銘を受けることと思います．筆者は最近 Drinfel'd 氏から生い立ちや数学観などについて話を伺う機会を得ましたので，興味をお持ちの方は [SS] をご覧下さい．本稿では Drinfel'd の可積分系における主要な業績を筆者の理解の及ぶ範囲で紹介したいと思います．

（1） インスタントン解の構成

可積分系に関係した仕事のうち最初のものは，常微分作用素の作る可換環およびその正標数での類似を扱った [D1] と思われます．

後に触れるソリトン方程式の理論において，準周期解とよばれるクラスの解の構成は，可換な常微分作用素の組を作ることに帰着されます．Krichever [Kr] は，後者が代数曲線上のある種の接続をもつベクトル束と 1 対 1 に対応することを発見しました．（この事実は 1920 年代すでに Burchnall-Chaundy [BC] によって知られていたことが後で判明しました．）Drinfel'd は微分作用素の代りに一般の体上のある種のねじれた多項式環をとって Krichever の対応を拡張しました．これらについては Mumford の解説 [Mu] で読むことができます．この仕事は，Drinfel'd 自身が $GL(2)$ の関数体に対するラングランズ予想の証明を完成するための鍵になったと言う事です [SS].

しかし，本来の可積分系の枠内における仕事としては，1978 年の Yang-Mills 方程式のインスタントン解の構成が最初と言えるでしょう．Yang-Mills 方程式は一般に 4 次元多様体 M 上の主束とその上の接続型式 A に対して定義される概念です．その幾何学的重要性については [It], [Hu] を参照して下さい．ここでは M がコンパクト化されたユークリッド空間 S^4 の場合に限って述べましょう．$A=\sum_{i=1}^{4} A_i(x)\,dx_i$ をリー環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ S^4 上の 1-型式，$F_A=dA+A\wedge A$ をその曲率型式とします．線形作用素 $*$ を $*\,dx_i\wedge dx_j=\pm dx_k\wedge dx_l$ ((i,j,k,l) は $(1,2,3,4)$ の置換，$\pm$ はその符号）で定める時，$*F_A=F_A$ と置いて得られる A に対する非線形微分方程式系を自己双対 Yang-Mills 方程式，その大域解をインスタントン解と呼びます．物理学者は後者がインスタントン数と呼ばれる整数（位相的不変量）で大別されることを指摘し，$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)$ の場合に具体的な解を見出していました [BPST]．Drinfel'd らの仕事は，$\mathfrak{g}$ が古典型コンパクトリー環の場合に，S^4 上の自己双対 Yang-Mills 方程式と $P^3(C)$ 上のある種の代数的ベクトル束とが 1 対 1 に対応することを利用して，インスタントン解の全体を決定し，更に線形代数のみを用いてそれらの初等的構成法を与えたものです．この結果は，Drinfel'd-Manin [DM1][DM2] および Atiyah-Hitchin によって独立に見出され，4 人の連名の論文 [ADHM] として発表されました．

（2） ソリトン方程式のハミルトン理論

1970 年代後半は，ゲージ理論とならんでソリトン方程式の理論が数学者の注目を集め，数学と物理学の急接近の開始を印象づける時代となりました．その代表例として KdV 方程式

$$u_t=u_{xxx}+uu_x \quad (u=u(x,t),\ \text{添字は微分}) \qquad (1)$$

が挙げられます．

いま一変数 x の関数 $u(x)$ の全体のなす無限次元多様体を $\mathcal{M}$ とし，その上にポアソン括弧

$$\{u(x),u(y)\}=\delta'''(y-x)+u(y)\,\delta'(y-x)$$