

# 複雑な系の上の異常拡散現象の解析

70 周年記念講演

熊谷 隆 (京都大学)\*

## 概 要

この講演では、複雑な系の上のランダムウォークや拡散過程の挙動に関する研究を概観する。ここでいう「複雑な系」は、フラクタルや、パーコレーションクラスター、ランダムコンダクタンスモデル、エルデシュ・レーニイのランダムグラフ、一様全域木などのランダムなグラフを具体例として念頭に置いている。近年、このような複雑な系に関する幾何学的性質が精力的に研究され、それらのスケール極限が導出されてきた。ここでは、これらの系の上のダイナミックスの解析に焦点を当てる。対象となる空間の不均質性により、対応するランダムウォークやそのスケール極限の拡散過程に異常拡散現象が現れる。関連分野の研究を年代順に概観し、自己相似性のある（理想的な）フラクタルを解析する際に開発された手法が、ランダムグラフのような複雑度の高いモデルの解析にどのように発展していったのかを解説する。

## 1. 序

複雑系という言葉は今では巷に溢れているが、高分子やネットワークなどの複雑な構造を体系的に解析するという研究には、決して長い歴史がある訳ではない。滑らかさのないこのような図形は、19 世紀には病的な例として扱われていたが、20 世紀後半になり Mandelbrot が、そのような歪な構造の図形は自然界にたくさん存在すると主張し、フラクタルという言葉を作り出した。複雑な系の体系的な研究はこの前後に始まったと言っても良いだろう。このような複雑な系の幾何学の研究の発達とともに、その上の熱伝導や波動の伝播といった物理的な現象にも関心が集まり、1960 年代半ば頃から数理論物理学者によって、複雑な系の上のダイナミックスの研究が進められるようになった（例えば [19] を参照のこと）。確率論の観点では、これは複雑な系の上のランダムウォークや拡散過程の性質を解析することに相当する。このような系の典型例は、パーコレーションクラスター上のランダムウォークである。このランダムウォークは、「迷路の中のアリ」の動き ([29]) とも例えられている。モデルを明確にするため、 $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$  上のボンドパーコレーションの定義を述べる。 $\mathbb{Z}^d$  のグラフの各々の長さ 1 のボンドは確率  $p \in [0, 1]$  で開いて（つながって）おり、確率  $1-p$  で閉じて（切れて）いるとする。ただし、各ボンドの開閉は、他のボンドの状態とは独立に決まるとする。このモデルは次の意味で相転移を起こすことがよく知られている。 $\mathcal{C}(0)$  を原点を含む開クラスター（原点を含む連結成分）、 $\theta(p) := P_p(|\mathcal{C}(0)| = +\infty)$  とすると、ある  $p_c = p_c(\mathbb{Z}^d) \in (0, 1)$  が存在し、 $p < p_c$  では  $\theta(p) = 0$ 、 $p > p_c$  では  $\theta(p) > 0$  となる。パーコレーションの開クラスター（開いたボンド達から成る連結成分）上の単純ランダムウォークとは、クラス

---

本研究は科研費 (課題番号:25247007) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 60J45; Secondary 05C81, 60K37.

キーワード：フラクタル, 熱核評価, パーコレーション, ランダム媒質, 劣拡散性

\* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: kumagai@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/>

ターの各点にいる粒子が、1秒後に開クラスター上の近傍点に等確率で動くようなランダムな動きのことである。 $p < 1$ の時には、開クラスターは $\mathbb{Z}^d$ 上のグラフを退化させた形状になっており、まさに迷路のような複雑な形状をしている。このモデル、 $p > p_c$ では無限に延びる開クラスターが唯一存在することが知られており、この場合には、穴がたくさんあるにも関わらずクラスター上の単純ランダムウォークは $\mathbb{Z}^d$ 上の通常の単純ランダムウォークのそれと似た様な長時間挙動をする(4.1節参照)ことが分かっている。これに対して、1982年にAlexander-Orbach [2]は、臨界確率 $p = p_c$ においては単純ランダムウォークの挙動は通常とは全く異なるという予想を出した。(この問題を数学的に厳密に捉えるには、4.2節で述べる様に臨界確率におけるパーコレーションクラスターが無限に延びるという条件付き確率を考えないといけない。)

$Y = \{Y_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$ をパーコレーションクラスター上の単純ランダムウォークとする。つまり、 $Y_n^\omega$ は $Y_{n-1}^\omega$ の開クラスター上の近傍点のいずれかであり、どの点であるかは等確率であるとする。なお、 $\omega$ は媒質のランダムネスを表す。 $p_n^\omega(x, y)$ をこのランダムウォークの熱核(密度関数)とする：厳密な定義は(6)を参照のこと。次の極限が存在するとき、このクラスターのスペクトル次元と呼ぶ。

$$d_s := -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_{2n}^\omega(x, x)}{\log n}. \quad (1)$$

(正確には、 $d_s$ は元来、固有値の増大度を表す‘density of states’から定義されていた。)  $d \geq 2$ の時 $d_s = 4/3$ であるという予想が、Alexander-Orbach 予想の一つの数学的な定式化である。 $\mathbb{Z}^d$ 上の通常のランダムウォークは $d_s = d$ なので、この予想は臨界確率パーコレーションクラスター上のランダムウォークが異常拡散であるという主張である。この予想を一つのきっかけとして進んできた複雑な系の研究の大きな流れを紹介することが、この講演の目的である。

数学的に厳密な研究は、80年代後半に始まった。1986年にKestenは2本の先駆的な論文[43, 44]を発表した。論文[43]で彼は、 $\mathbb{Z}^2$ 上の臨界確率パーコレーションに無限に延びるという条件付き確率を課したincipient infinite cluster (IIC)を構成し、その上の単純ランダムウォークが異常拡散現象を起こすことを示した。([44]は、臨界確率における分枝過程の木の上のランダムウォークの研究である。)これらの結果は、臨界確率におけるランダムウォークの異常拡散現象を数学的に厳密に証明した最初の論文であり、その後のフラクタル上の確率過程・解析学の研究を誘発することとなった(フラクタルは、ある意味で「理想的な複雑な系」と言える)。その一つの流れが、シェルピンスキーガスケットの様な典型的なフラクタル上にブラウン運動 $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ を構成し、その性質を解明するという研究である(2節参照)。熱核評価も、ブラウン運動の性質の研究の一つである。フラクタル上の熱核評価は、いわゆる劣ガウス型の熱核評価を持つ、すなわち、以下のような劣ガウス型の関数で熱核の上下評価ができる

$$c_1 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{1/(d_w-1)}\right)$$

(定数 $(c_1, c_2)$ の値は、上からと下からの評価で異なる)。ここで $d_w > 2$ であり、 $d(\cdot, \cdot)$ はフラクタル上の測地線距離である。このような熱核評価があれば、これを積分することで $c_1 t^{1/d_w} \leq E^x[d(x, B(t))] \leq c_2 t^{1/d_w}$ となる、つまり $d_w$ はブラウン運動の拡散のスピードを表す指数であると分かる。

フラクタル上の確率過程は現在も様々な方向で研究されているが、今世紀に入り、フラクタルそのものだけではなく、測度付き距離空間等の範疇で、例えば図3のフラクタル的多様体のような、何らかの意味でフラクタル的な構造を持った空間の解析的性質の解明に研究対象が広がってきている。ここで鍵になるのは、上述した劣ガウス型の熱核評価が空間や作用素の摂動に対して安定性を持つかどうかという点である。 $(d_s = d$  で  $d_w = 2$  の時は、対応する評価はガウス型評価と呼ばれ、このような安定性理論は長い間精力的に研究されてきた。) 近年の研究で、幾つかの関数不等式が劣ガウス型評価と同値になることが示され、これらの関数不等式が摂動安定性を持つことから劣ガウス型熱核評価の摂動安定性が示されている (3節参照)。

このような安定性理論は、Kestenが考察したパーコレーションクラスターを含むランダム媒質上の解析学においても有用である。実際、幾つかの関数不等式について、ランダム媒質にも適用可能なように変形が加えられ、パーコレーションクラスターをはじめ複雑な系上のランダムウォークや拡散過程に用いられている (4節参照)。特に、上述した Alexander-Orbach 予想は高次元において肯定的に解決されている (定理 4.4)。また、幾つかのランダムなモデルについては、その上のランダムウォークのスケール極限が何であるかも解明されている (4.1節及び5節参照)。具体的には、優臨界確率のパーコレーションクラスター、臨界確率分枝過程の IIC、臨界確率周辺のエルデシュ・レーニイのランダムグラフ、二次元一様全域木などが挙げられる。

本講演では、以上の研究の流れを概観する。つまり、次の3つのテーマを扱う。

- フラクタル上の拡散過程の解析 (2節)
- ハルナック不等式と熱核評価の摂動安定性 (3節)
- ランダム媒質中の確率過程とそのスケール極限 (4,5節)

時間やページ数の制限があるので、紹介できる結果や参考文献は限定的であることをあらかじめお断りしておく。さらに詳しい内容を知りたい方には、以下の本や解説をご覧頂きたい [7, 9, 19, 22, 27, 30, 32, 38, 39, 41, 45, 47, 49, 52, 55, 58, 61, 62]。なお、この原稿は [50] を元に、手直しと情報の更新を行ったものである。

記号:  $f \asymp g$  は、定数  $c_1, c_2 > 0$  が存在し、任意の  $x$  について  $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$  が成り立つことを意味する。 $f \sim g$  は、 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$  を意味する。

## 2. フラクタル上の異常拡散

80年代半ばは、フラクタル上の確率過程・解析学の揺籃期であった。繰り込み群の観点からフラクタルを研究していた服部ら (Hattori-Hattori-Watanabe (1987)) が楠岡と出会い、谷口シンポジウムで Kesten は、当時出来立てであった上述の結果を発表した。これらの出会いに触発され、楠岡 (1987) がバスケット上のブラウン運動を構成し、同時期に木上 (1989) はバスケット上に直接ラプラス作用素を構成した。Barlow-Perkins [18] は、ブラウン運動の熱核の詳細な評価 (2) を導出し、劣ガウス型の熱核評価というその後の複雑な系の研究に大きな影響を与える評価を、初めて厳密に示した。その後の福島-島 (1992) らの研究で、ディリクレ形式の理論 ([27] 参照) が当該研究に大変有用であることが明確になり、フラクタル上の拡散過程や自己共役作用素が、ディリクレ形式を用いて体系的に構成されるようになった。- このように、当該研究における日本人の貢献は非常に大きい。以下、バスケットにスポットを当てて少し詳しく見よう。

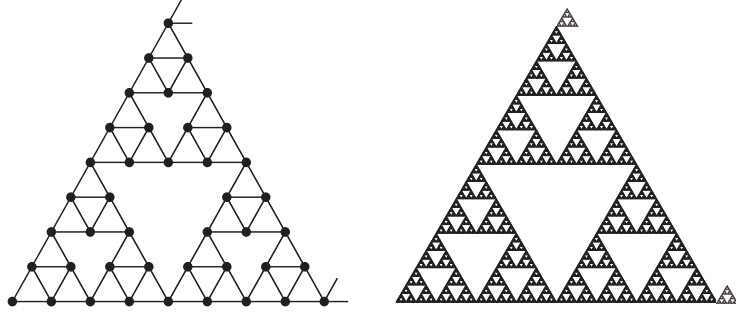


図 1: シェルピンスキーガスケツトグラフ  $V_0$  とシェルピンスキーガスケツト  $\hat{K}$

$a = (0, 0), b = (1, 0), c = (1/2, \sqrt{3}/2)$  と置き、

$$F_1(x) = (x - a)/2 + a, \quad F_2(x) = (x - b)/2 + b, \quad F_3(x) = (x - c)/2 + c$$

とする。すると、 $K = \bigcup_{i=1}^3 F_i(K)$  を満たす空でないコンパクトな集合が唯一存在する。これを二次元シェルピンスキーガスケツトと呼ぶ。無限に延ばしたシェルピンスキーガスケツトを  $\hat{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} 2^n K$  で定める。

まず、 $\hat{K}$  上のブラウン運動の構成について説明する。

$$V_0 = \bigcup_{m=0}^{\infty} 2^m \left( \bigcup_{i_1, \dots, i_m=1}^3 F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_m}(\{a, b, c\}) \right), \quad V_m = 2^{-m} V_0.$$

と置く。 $\bigcup_{m \geq 0} V_m$  の閉包は  $\hat{K}$  である。 $\{X(i)\}_{i \geq 0}$  を  $V_0$  上の単純ランダムウォークとする。すなわち、 $X(i+1)$  は等確率で  $X(i)$  の  $V_0$ -近傍点のいずれかの点であるとする。 $X_m(i) := 2^{-m} X(i)$  を  $V_m$  上の単純ランダムウォークとする。 $X_m$  は 1 秒間に  $2^{-m}$  動き、 $i$  をとめると  $m \rightarrow \infty$  のとき  $X_m(i) \rightarrow 0$  となるため、非自明なスケール極限を得るにはランダムウォークをスピードアップする必要がある。時間スケールとしては、 $V_m$  の点から出発する  $V_{m+1}$  上のランダムウォークが  $V_m$ -近傍点に初めて到達するまでの平均時間を取るのが自然であろう。 $\hat{K}$  の自己相似性と対称性から、この平均時間は  $m$  に依らずに定まり、それは  $a$  から出発した  $X_1$  が初めて  $b$  か  $c$  に到達するまでの平均時間に等しいことが分かる。簡単な計算によりこの平均時間は 5 と分かる。 $Y_t^{(m)} := X_m([5^m t])$  とおくと、 $\{Y^{(m)}\}$  が  $m \rightarrow \infty$  で  $\hat{K}$  上の非自明な拡散過程に収束することが示され、これを  $\hat{K}$  上のブラウン運動と呼ぶ。 $K$  上のブラウン運動も同様に構成することができる。ガスケツト上のブラウン運動は、Goldstein (1987) と楠岡 (1987) によって初めて構成された。この確率過程がブラウン運動と呼ぶにふさわしい理由は、以下の通りである： $\hat{K}$  で自己相似かつ各小三角形内の局所的な平行移動や折り返しによって法則が不変であるような拡散過程は、このブラウン運動の定数倍である ([18])。ブラウン運動に対応するラプラス作用素  $\Delta$  は以下のように定められる：

$$\Delta f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 5^m \left( \sum_{x_i: x \stackrel{m}{\sim} x_i} f(x_i) - 4f(x) \right), \quad x \in \bigcup_{m \geq 0} V_m \setminus \{0\}.$$

ここで  $f$  は然るべき関数空間の元、 $x \stackrel{m}{\sim} y$  は、 $x$  と  $y$  が  $V_m$ -近傍であることを意味する。 $\mathbb{R}$  上の通常のラプラス作用素は  $\Delta f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{2m} (f(x+2^{-m}) + f(x-2^{-m}) - 2f(x))$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$  で定まることに注意しておく。 $d_w = \log 5 / \log 2$  (従って  $5 = 2^{d_w}$ ) とおく。



標語的には、ガスケツト上のブラウン運動は“ $d_w$  階の微分作用素”とすることができる。(ガスケツト上の対応するディリクレ形式の定義域は  $d_w/2$  次のベソフ空間である (Jonsson (1996), Grigor'yan-Hu-Lau (2003)) という事実は、この標語の数学的に厳密な裏付けとなる。)  $\mathbb{R}^d$  上で、 $(d+1)$  個の縮小率  $1/2$  の縮小写像の族を使って、シェルピンスキーガスケツトを  $\hat{K}$  と同様に定義することができる ( $d=1$  の時は  $\hat{K} = [0, \infty)$  となる)。  $d$  次元ガスケツトのハウスドルフ次元は  $d_f = \log(d+1)/\log 2$  であり、時間スケールは  $d+3$ 、従って  $d_w = \log(d+3)/\log 2$  となる。

この拡散過程の漸近挙動を解析するのに、熱核の詳細な評価を行うことが非常に重要かつ有用となる。 $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  をガスケツト上のブラウン運動とし、

$$P_t f(x) = E^x[f(B(t))] = \int_{\hat{K}} p_t(x, y) f(y) \mu(dy),$$

と定義する (ここで  $\mu$  は  $\hat{K}$  上の正規化されたハウスドルフ測度)。 $\{P_t\}_{t \geq 0}$  をブラウン運動の定める半群とし、 $p_t(\cdot, \cdot)$  を熱核 (密度関数) とする。 $p_t(\cdot, \cdot)$  はラプラス作用素の定める熱方程式の基本解である。 $\mathbb{R}^d$  上のブラウン運動の場合には、 $p_t(x, y)$  はガウス核  $(2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x-y|^2/(2t))$  である。

$d(x, y)$  を  $\hat{K}$  上の  $x$  と  $y$  の最短距離とする。Barlow-Perkins [18] により、以下の劣ガウス型熱核評価が得られた。

**定理 2.1**  $p_t(x, y)$  は任意の  $t > 0, x, y \in \hat{K}$  で以下の評価を満たす：

$$\begin{aligned} c_1 t^{-d_f/d_w} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{1/(d_w-1)}\right) &\leq p_t(x, y) \\ &\leq c_3 t^{-d_f/d_w} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{1/(d_w-1)}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

$V_0$  上の単純ランダムウォークも  $d(x, y) \leq t \in \mathbb{N}$  の範囲で (2) を満たすことが知られている (Jones (1996))。

確率論的には、 $d_w$  は粒子の拡散のスピードを表す指数であり、それ故ウォーク次元と呼ばれている。実際、序でも述べたように (2) を積分することで  $E^x[d(x, B(t))] \asymp t^{1/d_w}$  という評価を得る。 $d_w > 2$  なので、この確率過程は異常拡散現象を示している (長時間挙動が  $\mathbb{R}^d$  上のブラウン運動より指数のレベルで遅いことがわかり、従って劣拡散的な挙動をしている)。この拡散過程は有限の二次変分をもたず、従ってセミマルチンゲールではない ([18])。また、この拡散過程のマルチンゲール次元は 1 である (楠岡 [53], 日野 [37])。 $d_s/2 = d_f/d_w$  と置こう。この  $d_s$  は (1) で現れたスペクトル次元であり、これは  $K$  上のラプラス作用素の固有値の増大度を表す指数である。ラプラス作用素のスペクトルの挙動は、特に 90 年台に盛んに研究されてきた (福島-島 (1992), 木上-Lapidus (1993), Barlow-木上 (1997), Teplyaev (1998) など)。ユークリッド空間の場合と異なり、ガスケツト上のブラウン運動やラプラス作用素に関連する漸近挙動には様々な形で振動が起こっている。例えば、固有値の増大度の漸近挙動 (Barlow-木上 (1997))、熱核の対角評価の漸近挙動 (Grabner-Woess (1997), 梶野 (2013))、シルダー型の大偏差原理 (Ben Arous-熊谷 (2000)) 等における振動が知られている。

(2) は大変有用な評価である。例えば重複対数の法則などのブラウン運動の様々な性質を、この不等式から導き出すことができる。さらに、(2) から熱方程式の解  $u(t, x)$

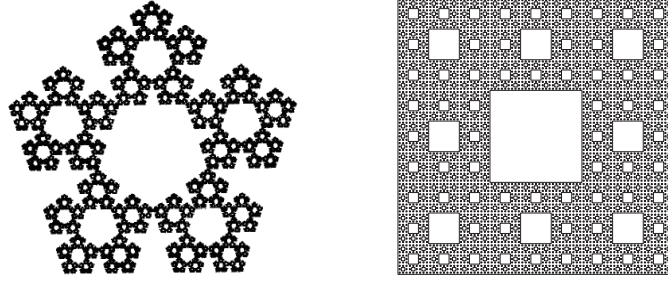


図 2: ペンタくんとシェルピンスキーカーペット

( $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  の解) に関する重要な性質を導き出すことができる。  $S, R \in (0, \infty), x_0 \in \hat{K}$  に対し、

$$Q_- = (S + R^{d_w}, S + 2R^{d_w}) \times B(x_0, R), \quad Q_+ = (S + 3R^{d_w}, S + 4R^{d_w}) \times B(x_0, R)$$

と置く。次に述べる放物型ハルナック不等式は、熱方程式の解の  $Q_-$  での値と  $Q_+$  を一様に比較する不等式であり、このような関数の一様ヘルダー連続性を導出できるありがたい不等式である。

**定理 2.2** (放物型ハルナック不等式とヘルダー連続性)  $c_1, c_2, \theta > 0$  が存在して、任意の  $S, R \in (0, \infty), x_0 \in \hat{K}$  について、  $(S, S + 4R^{d_w}) \times B(x_0, 2R)$  上の熱方程式の非負解  $u$  は以下を満たす。

$$\sup_{(t,x) \in Q_-} u(t, x) \leq c_1 \inf_{(t,x) \in Q_+} u(t, x), \quad (PHI(d_w))$$

$$|u(s, x) - u(s', x')| \leq c_2 \left( \frac{|s - s'|^{1/d_w} + d(x, x')}{R} \right)^\theta \|u\|_\infty. \quad (3)$$

ここで  $(s, x), (s', x') \in (S + R^{d_w}, S + 4R^{d_w}) \times B(x_0, R)$ 。

(2) と  $(PHI(d_w))$  の関係は次節で述べる。 $(PHI(d_w))$  から、楕円型ハルナック不等式やリウヴィル性 ( $\hat{K}$  上の非負調和関数は定数関数であるという性質) といった調和関数の様々な性質が導き出される。

ネスティドフラクタル (Lindström (1990)) やシェルピンスキーカーペット (図 2 参照: 左図はネスティドフラクタルの一例) など、さらに一般のフラクタルにおいてもブラウン運動やディリクレ形式が構成され、熱核の劣ガウス型評価 (2) (Barlow-Bass (1989, 1999), Lindström (1990), 熊谷 (1993), Fitzsimmons-Hambly-熊谷 (1994)) や、ブラウン運動の特徴づけ (Metz (1996), Sabot (1997), Barlow-Bass-熊谷-Teplyaev (2010)) 等が研究されている。

フラクタル上の拡散過程や解析学に関する詳細は、[7, 9, 38, 41, 45, 47, 52, 61] 等を参照して欲しい。当該研究には拡がりがあり、ここで紹介した内容以外にも様々な切り口から重要な研究が進められている。その中の幾つかを以下に挙げておく。

- フラクタル上の測度論的リーマン構造 ([41, 46] 等)
- 指数、マルチンゲール次元の解析 ([37, 38, 53] 等)
- Apollonian gasket の上の拡散過程とその性質 ([42])

- フラクタル上の自己回避ウォーク、ループ除去ランダムウォーク ([34, 35] 等)

未解決問題 1: 現在知られているシェルピンスキーカーペット上のブラウン運動の構成では、ブラウン運動を近似する確率過程に関する調和関数の一様なハルナック不等式が用いられている ([9] 参照)。カーペット上のブラウン運動を、このような精密な情報を用いずに構成せよ。

### 3. 放物型ハルナック不等式と劣ガウス型評価の摂動安定性

完全な自己相似性を持ったフラクタルは“理想的な”対象であるので、(2) や  $(\text{PHI}(d_w))$  が作用素や空間の摂動によって安定であるかという自然な疑問が湧いてくる。このような摂動安定性の問題は、例えばガウス型の熱核については極めて重要な問題として大変長い歴史があるが、次節以降でも述べるように、ランダム媒質上の確率過程の漸近挙動解析の観点からも大変重要である。

まず  $d_w = 2$  の場合 (ガウス型の場合) の歴史を概観しよう。一様楕円性を持つ  $\mathbb{R}^d$  上の divergence 作用素  $\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j})$  については、Aronson (1967) が (2) を ( $d_f = d, d_w = 2$  として) 証明した。前世紀の後半には、多様体上の大域解析学において傑出した結果が報告された。 $\Delta$  を完備リーマン多様体  $M$  上のラプラス-ベルトラミ作用素とする ( $d(\cdot, \cdot)$  をリーマン距離、 $\mu$  をリーマン測度とする)。Li-Yau (1986) は、 $M$  が非負リッチ曲率を持つ場合、熱核  $p_t(x, y)$  が以下の評価を満たすことを示した。

$$c_1 \Phi(x, c_2 d(x, y), t) \leq p_t(x, y) \leq c_3 \Phi(x, c_4 d(x, y), t). \quad (4)$$

ただし、 $\Phi(x, r, t) = \mu(B(x, t^{1/2}))^{-1} \exp(-r^2/t)$  とする。その数年後に、Grigor'yan (1991) と Saloff-Coste (1992) はこの結果をさらに深め、(4) は体積増大条件 (VD) + ポアンカレ不等式 (PI(2)) — グラフの設定での厳密な定義は定義 3.1, 3.3 を参照のこと — と同値であることを証明した。(正確に述べると、この同値性には Fabes-Stroock (1986), 福岡-Stroock (1987) 等の結果も援用する必要がある。) この結果は後に Sturm (1996) によってディリクレ形式の枠組みに、Delmotte (1999) によってグラフの枠組みに拡張された。熱核の精密な評価は、調和関数の評価とも大きく関係する。当該研究の歴史は長く、De Giorgi (1957), Nash (1958), Moser (1961, 1964) に遡る。関連した深遠な研究が数多くあることも注意しておく。これらの詳細は、[30, 58] やその中の参考文献を参照のこと。まとめると、以下の同値性が得られている：

$$(4) \Leftrightarrow (\text{VD}) + (\text{PI}(2)) \Leftrightarrow (\text{PHI}(2)). \quad (5)$$

(VD) や (PI(2)) は定義 3.2 の意味で摂動安定であるので、(4) や (PHI(2)) の摂動安定性が従うのである。

以下この節では、 $d_w > 2$  の場合の (5) の拡張について述べる。このような拡張は、測度付き距離空間上の局所正則なディリクレ形式と呼ばれる範疇でなされているが、以下では簡単のためグラフに限って議論をする。まずは記号の準備と幾つかの定義を行う。

#### 3.1. 設定

$G$  を可算無限集合とし、 $E = \{\{x, y\} \in G \times G : x \neq y\}$  とする。 $\{x, y\} \in E$  のとき  $x \sim y$  とかく。以下、 $(G, E)$  というペアとグラフ距離  $d(x, y)$ ,  $x, y \in G$  を考える。グラフは連結 (任意の  $x, y \in G$  について  $d(x, y) < \infty$ ) かつ局所有限 (任意の  $x \in G$

について  $|\{y \in G : \{x, y\} \in E\}| < \infty$  と仮定する。  $x \in G$  と  $r \geq 0$  について、  $B(x, r) = \{y \in G : d(x, y) \leq r\}$  とおく。

$G \times G$  上の非負対称な関数  $\mu_{xy}$  を、  $x \sim y$  の時に限り  $\mu_{xy} > 0$  となるように定め、これをグラフの重み（コンダクタンス）と呼ぶ。 $(G, \mu)$  のペアを重み付きグラフと呼ぶ；これを電気回路とみなすこともできる。 $(G, \mu)$  上に二次形式を以下のように定める。

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in G \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\mu_{xy}, \quad \forall f, g \in \mathbb{R}^G.$$

各  $x \in G$  について  $\mu_x = \sum_{y \in G} \mu_{xy}$  とおき、  $A \subset G$  に対して  $\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu_x$  とおく。 $\mu$  は  $G$  上の測度となる。 $G$  上の離散マルコフ連鎖  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  を、以下で定める。

$$P(Y_{n+1} = y | Y_n = x) = \frac{\mu_{xy}}{\mu_x} =: P(x, y), \quad \forall x, y \in G.$$

$x \sim y$  なる  $x, y$  について  $\mu_{xy} = 1$  である時、  $Y$  は単純ランダムウォークと呼ばれる。 $P^x(\cdot) := P(\cdot | Y_0 = x)$  とおくと、  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  の熱核は次のように表される。

$$p_n(x, y) := P^x(Y_n = y) / \mu_y, \quad \forall x, y \in G. \quad (6)$$

明らかに  $p_n(x, y) = p_n(y, x)$  である。 $\mu$  から決まる連続時間マルコフ連鎖  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  を次で定める：粒子は各点（ $x$  と置く）にパラメーター 1 の独立な指数分布で留まり、その後他の点（ $y$  と置く）に確率  $P(x, y)$  でジャンプする。 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  の熱核は以下のように表現できる。

$$p_t(x, y) = P^x(Y_t = y) / \mu_y = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} p_n(x, y), \quad \forall x, y \in G.$$

$\{Y_t\}_{t \geq 0}$  に対応する離散ラプラス作用素は

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{\substack{y \in G \\ y \sim x}} P(x, y) f(y) - f(x) = \frac{1}{\mu_x} \sum_{\substack{y \in G \\ y \sim x}} (f(y) - f(x)) \mu_{xy}$$

と表される。本節では、重み付きグラフに以下の仮定を置く。

**定義 3.1**  $(G, \mu)$  を重み付きグラフとする。

(i)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、制御付き重みを持つという：  $p_0 > 0$  が存在し、

$$P(x, y) = \mu_{xy} / \mu_x \geq p_0, \quad \forall x \sim y \in G.$$

(ii)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、体積増大条件 (VD) を満たすという：  $c_1 > 1$  が存在し、

$$\mu(B(x, 2R)) \leq c_1 \mu(B(x, R)), \quad \forall x \in G, R \geq 1. \quad (7)$$

### 3.2. 安定性

まず、2種類の摂動の概念を導入する。

**定義 3.2**  $(G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2)$  を、制御付き重みを持つグラフとする。

(i) 次を満たすとき、 $(G_2, \mu_2)$  は  $(G_1, \mu_1)$  の有界摂動という：  $G_1 = G_2$  であり、  $c_1, c_2 > 0$  が存在して任意の  $x \sim y$  で  $c_1(\mu_1)_{xy} \leq (\mu_2)_{xy} \leq c_2(\mu_1)_{xy}$  となる。

(ii) 写像  $T : G_1 \rightarrow G_2$  が次を満たすとき、概等長写像 (rough isometry) という：  $c_1, \dots, c_4 > 0$  が存在し、任意の  $x, y \in G_1$  と  $y' \in G_2$  について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} c_1^{-1}d_1(x, y) - c_2 &\leq d_2(T(x), T(y)) \leq c_1d_1(x, y) + c_2, \\ d_2(T(G_1), y') &\leq c_3, \quad c_4^{-1}(\mu_1)_x \leq (\mu_2)_{T(x)} \leq c_4(\mu_1)_x. \end{aligned}$$

ここで、 $d_i(\cdot, \cdot)$  は  $(G_i, \mu_i)$  のグラフ距離 ( $i = 1, 2$ )。  $(G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2)$  間にこのような概等長写像が存在するとき、これらは概等長であるという。

概等長という概念は、金井 (1985) によって導入された。(これは、Gromov (1981) によって導入された quasi-isometry に当たるものである。)

ここで幾つかの (関数) 不等式を定義しよう。

**定義 3.3**  $(G, \mu)$  を制御付き重みを持つグラフとし、  $\beta > 1$  とする。

(i)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、劣ガウス型熱核評価 (HK( $\beta$ )) を持つという：  $c_1, \dots, c_4 > 0$  が存在して、任意の  $x, y \in G, n \geq d(x, y) \vee 1$  について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_n(x, y) &\leq \frac{c_1}{\mu(B(x, n^{1/\beta}))} \exp\left(-c_2\left(\frac{d(x, y)^\beta}{n}\right)^{1/(\beta-1)}\right), \\ p_n(x, y) + p_{n+1}(x, y) &\geq \frac{c_3}{\mu(B(x, n^{1/\beta}))} \exp\left(-c_4\left(\frac{d(x, y)^\beta}{n}\right)^{1/(\beta-1)}\right). \end{aligned}$$

(ii)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、指数  $\beta$  のスケールポアンカレ不等式 (PI( $\beta$ )) を持つという：  $c_1 > 0$  が存在して、任意の球  $B_R := B(x_0, R) \subset G, x_0 \in G, R \geq 1$  と  $f : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  について以下が成り立つ。

$$\sum_{x \in B_R} (f(x) - \bar{f}_{B_R})^2 \mu_x \leq c_1 R^\beta \sum_{x \in B_R} \Gamma(f, f)(x).$$

ここで  $\bar{f}_{B_R} := \mu(B_R)^{-1} \sum_{y \in B_R} f(y) \mu_y, \Gamma(f, f)(x) := \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy}$  とする。

(iii)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、指数  $\beta$  のカットオフ-ソボレフ不等式 (CSA( $\beta$ )) を持つという：  $c_1 > 0$  が存在して、任意の  $x_0 \in G, R, r \geq 1$  について以下を満たす関数  $\varphi$  が存在する：

- (a)  $x \in B_R$  のとき  $\varphi(x) = 1$  であり、  $x \in B_{R+r}^c$  のとき  $\varphi(x) = 0$ 。
- (b)  $U = B_{R+r} \setminus B_R$  とする。任意の  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  について、以下が成り立つ。

$$\sum_{x \in U} f(x)^2 \Gamma(\varphi, \varphi)(x) \leq c_1 \left( \sum_{x \in U} \varphi(x)^2 \Gamma(f, f)(x) + r^{-\beta} \sum_{x \in U} f(x)^2 \mu_x \right).$$

**定理 3.4** ([3, 10, 11]) 制御付き重みを持つグラフ  $(G, \mu)$  について、以下は同値である。

$$(VD) + (PI(\beta)) + (CSA(\beta)) \Leftrightarrow (PHI(\beta)) \Leftrightarrow (HK(\beta)). \quad (8)$$

(8) で、(PHI( $\beta$ )) は定理 2.2 の (PHI( $d_w$ )) の離散版で  $d_w = \beta$  としたものとする。

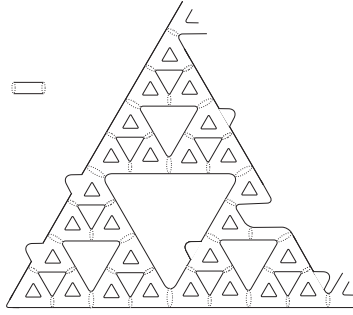


図 3: フラクタル的多様体

注意 3.5 (i) (8) の同値条件はいくつもある。[31, 62] とその中の参考文献を参照せよ。  
(ii) (8) のいずれか (従ってすべて) が成立すれば、 $\beta \geq 2$  であることが知られている。  
(iii) グラフにおいては、(CSA(2)) は常に成り立つ ( $\varphi(x) = 1 \wedge r^{-1}d(x, B_{R+r}^c)$  と取ると良い)。従って、少なくともグラフの場合には定理 3.4 は (5) の  $\beta > 2$  への拡張であることが分かる。

(iv) [3] の主定理は、(HK( $\beta$ )) の上からの評価と (CSA( $\beta$ )) + 指数  $\beta$  のフェイバー-クラウン不等式の同値性である。この結果は、一般の測度付き距離空間の枠組みで成立する。

$\beta = 2$  の場合には、ハルナック不等式 (5) を示す手法としてモーザーの反復法と呼ばれる手法がよく知られている。この手法が有効に機能するためには、線型カットオフ関数を用いて正しいスケール指数が導き出せることが必要になる。 $\beta > 2$  の場合に、リップシツツ連続なカットオフ関数を用いて同様の議論を行った場合、得られる評価は弱く、ハルナック不等式は導出できない。ラフに言うと、(CSA( $\beta$ )) は、 $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) \leq c_1 R^{-\beta} \mu(B_R)$  を満たすようなカットオフ関数  $\varphi$  の存在を保証するものである。(なお、リップシツツ連続なカットオフ関数の持つエネルギーのオーダーは  $R^{-2} \mu(B_R)$  である。)  $\beta > 2$  の場合にハルナック不等式を導出するアイデアは、重み付き測度  $\nu_x := \mu_x + R^\beta \Gamma(\varphi, \varphi)(x)$  を基礎測度とし、(CSA( $\beta$ )) を用いてモーザーの反復法を実行するというものである。

明らかに、(VD), (PI( $\beta$ )) と (CSA( $\beta$ )) は有界な摂動について安定である。さらにこれらの不等式は、概等長についても安定であることが示される (Hambly-熊谷 (2004) 等)。従って (8) から、(PHI( $\beta$ )) や (HK( $\beta$ )) の安定性が証明されたことになる。

定理 3.4 は測度付き距離空間で局所正則ディリクレ形式の範疇で成立する (特に、リーマン多様体で成立する)。また、ウォーク次元  $\beta$  が短時間と長時間で異なる場合にも成り立つことが知られている。図 3 は、大域的構造がガスケットに似た二次元リーマン多様体である。このような多様体は、図 1 の左図の各々のボンドを円筒に変え、局所的に凸凹をつけ、最後に多様体になるように適度に滑らかにすることで構成できる。ディリクレ形式に対応する拡散過程は、円筒の表面を動く。定理 3.4 (の一般化版) を用いることで、この多様体上の一様楕円な divergence 形式  $\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j})$  は  $R \leq 1$  では (PHI(2)) を、 $R \geq 1$  では (PHI( $\log 5 / \log 2$ )) を満たすことがわかる。

注意 3.6 近年、飛躍型確率過程 (非局所作用素) についても安定性理論が整備されつつある ([24] と、その中の参考文献参照)。注意 4.8 に述べるように、これらの研究は長距離相関を持つランダム媒質上の確率過程の研究に資すると考えられる。

### 3.3. 強再帰的な場合

定理 3.4 の問題点は、具体例で  $(\text{CSA}(\beta))$  をチェックするのが大変困難な点である。より強い体積増大度の仮定のもとでは、以下に述べるより単純な同値条件が知られている。

各  $x \neq y \in G$  に対して、2 点間の有効抵抗を次のように定める。

$$R_{\text{eff}}(x, y)^{-1} = \inf \left\{ \mathcal{E}(f, f) : f(x) = 1, f(y) = 0, f \in \mathbb{R}^G \right\}. \quad (9)$$

各  $x \in G$  について、 $R_{\text{eff}}(x, x) = 0$  とおく。

定義 3.7 (i)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、指数  $\beta$  の体積増大条件  $(\text{VG}(\beta_-))$  が成り立つという：  $\log c_1 / \log K < \beta$  なる  $K > 1, c_1 > 0$  が存在して、次が成り立つ。

$$\mu(B(x, KR)) \leq c_1 \mu(B(x, R)), \quad \forall x \in G, R \geq 1.$$

(ii)  $(G, \mu)$  が以下を満たすとき、指数  $\beta$  の有効抵抗評価  $(\text{RE}(\beta))$  が成り立つという：  $c_1, c_2 > 0$  が存在して、次が成り立つ。

$$\frac{c_1 d(x, y)^\beta}{\mu(B(x, d(x, y)))} \leq R_{\text{eff}}(x, y) \leq \frac{c_2 d(x, y)^\beta}{\mu(B(x, d(x, y)))}, \quad \forall x, y \in G.$$

定理 3.8 ([12])  $(G, \mu)$  を制御付き重みを持つグラフとし、 $(\text{VG}(\beta_-))$  を仮定する。この時、以下は同値である。

$$(\text{RE}(\beta)) \Leftrightarrow (\text{PHI}(\beta)) \Leftrightarrow (\text{HK}(\beta)).$$

上の条件の下、対応するマルコフ連鎖は次の意味で強い再帰性を持つ：  $p_1 > 0$  が存在して、任意の  $x \in G, r \geq 1$  と  $y \in B(x, r)$  について  $P^x(\sigma_{\{y\}} < \sigma_{B(x, 2r)^c}) \geq p_1$  が成り立つ；ただし  $\sigma_A = \min\{n \geq 0 : Y_n \in A\}$  と定める。定理 3.8 の測度付き距離空間の設定への拡張も知られている（木上 ([47]), 熊谷 (2004) 参照）。

次節に述べるように、この定理の証明を改良することで、ランダム媒質にも適用可能な命題を作り出すことができる。

未解決問題 2：一般のグラフに適用可能な、より単純な  $(\text{HK}(\beta))$  の同値条件を与えよ。

## 4. パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

ここからは、ランダム媒質中のランダムウォークについて述べる。 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を、重み付きグラフのランダム性を表す確率空間とする。 $\omega \in \Omega$  毎に、ランダムな重み付きグラフ  $(\mathcal{G}(\omega), \mu(\omega))$  を考える。すると、制御付き重みを持つという条件や  $(\text{VD})$  は一般には到底期待できなくなるため、前節までに述べた議論を直接用いることはできない。我々の興味は、対応するマルコフ連鎖  $\{Y_t^\omega\}_{t \geq 0}$  の長時間挙動を、媒質のランダム性について確率 1 のレベルで明らかにすることである。特に以下の 2 つの問題に興味がある：

(Q1) 熱核  $p_t^\omega(\cdot, \cdot)$  の長時間挙動の解析

(Q2)  $\{Y_t^\omega\}_{t \geq 0}$  のスケール極限の解析

(添字  $\omega$  は媒質のランダムネスを表すことに注意。) 典型例は、 $d \geq 2$  なる  $\mathbb{Z}^d$  上のパーコレーションクラスター上のランダムウォークである。

#### 4.1. 優臨界確率の場合

まずは優臨界確率の場合を考えよう。この場合、 $\{\mu_e : e \in E_d\}$  は  $\mathbb{P}(\mu_e = 1) = p, \mathbb{P}(\mu_e = 0) = 1 - p$  (ただし  $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$ ) を満たすベルヌーイ列である。各ボンドのコンダクタンスの重みが1であるような、長さ無限大の連結成分  $\mathcal{G}(\omega)$  が唯一存在することがわかる。 $\{0 \in \mathcal{G}(\omega)\}$  の条件付きの下、 $\mathbb{P}_0(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | 0 \in \mathcal{G})$  と置く。(Q1) については、以下の熱核評価が [8] で証明されている。

**定理 4.1** 定数  $\eta, c_1, \dots, c_6 > 0$  と確率変数族  $\{U_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$  で  $\mathbb{P}(U_x \geq n) \leq c_1 \exp(-c_2 n^\eta)$  を満たすものが存在して、任意の  $t \geq U_x \vee |x - y|$  について以下が  $\mathbb{P}_0$ -a.s. で成り立つ。

$$c_3 t^{-d/2} \exp(-c_4 |x - y|^2/t) \leq p_t^\omega(x, y) \leq c_5 t^{-d/2} \exp(-c_6 |x - y|^2/t). \quad (10)$$

この証明には (5) の精神が生かされる。 $B(x, r)$  は、次が成り立つ時に「良い」球であると言う：この球の体積が  $r^d$  のオーダーであり、球上 (PI(2)) が成り立つ。高い確率で各々の球は「良い」球であることが示され、さらにボレル-カンテリの補題を使って  $\mathbb{P}$ -a.s. の評価が得られる。「良い」球の上の熱核評価を得る際に (5) の証明のアイデアが生かされる。

(Q2) については、 $\mathbb{P}_0$ -a.s. の不変原理 (quenched invariance principle: 以下、個別不変原理と呼ぶ) が成り立つことが知られている。すなわち、 $\varepsilon Y_{t/\varepsilon^2}^\omega$  が  $\varepsilon \rightarrow 0$  の時に  $\mathbb{P}_0$ -a.e.  $\omega$  で  $\mathbb{R}^d$  上のブラウン運動 (で、共分散が  $\sigma^2 I$ ,  $\sigma > 0$  となるもの) に収束することが示されている。この事実は、 $d \geq 4$  の時に [60] で最初に証明され、その後 [21, 57] において、 $d \geq 2$  に拡張された。 $d \geq 3$  における証明では、(10) の評価が用いられる。

**定理 4.2**  $\varepsilon Y_{t/\varepsilon^2}^\omega$  が  $\varepsilon \rightarrow 0$  の時に  $\mathbb{P}_0$ -a.e.  $\omega$  で ( $P_\omega^0$  の下で)  $\mathbb{R}^d$  上のブラウン運動で共分散が  $\sigma^2 I$  ( $\sigma > 0$  はランダムでない定数) となるものに法則収束する。

このモデルではさらに、 $\mathbb{P}_0$ -a.s. で局所中心極限定理が示されている ([14])。阿部 [1] は、このモデルの有限近似グラフを考え、その上のランダムウォークの被覆時間 (ランダムウォークが有限グラフの全ての点を通るのにかかる時間) が、 $d \geq 3$  の時には通常のランダムウォークの被覆時間より対数時間倍長いことを示し、優臨界確率においても通常のランダムウォークと違いがあることを明らかにした。

パーコレーションは、コンダクタンスが (一様楕円でなく) 退化したモデルであり、従ってその上のランダムウォークが確率1でブラウン運動に収束するかどうかは非自明であることを強調しておく。なお、より一般のランダムコンダクタンスモデルについて、 $\mathbb{E}\mu_e < \infty$  の時、 $\mathbb{P}_0 \times P_\omega^0$  の下での (つまり弱い意味での) ブラウン運動への収束は Kipnis-Varadhan (1986) 等の研究で既に 80 年台に知られていた (De Masi-Ferrari-Goldstein-Wick (1989) や Kozlov (1985) 等も参照のこと)。このような収束は平均不変原理 (annealed (averaged) invariance principle) とも呼ばれる。平均不変原理から個別不変原理に行き着くのに、20 年余りの年月を要したということである。

**注意 4.3** (Q1), (Q2) は、より一般のランダムコンダクタンスモデルにおいても精力的に研究されている。 $\{\mu_e : e \in E_d\}$  を定常エルゴード的な非負確率変数の族とし、 $\mathbb{P}(\mu_e > 0) > p_c(\mathbb{Z}^d)$  を満たすとする。この時、各ボンドが真に正のコンダクタンスを持つ無限の連結成分  $\mathcal{G}(\omega)$  が唯一存在する。ランダムな重み付きグラフ  $(\mathcal{G}, \mu)$  のモデルを、ランダムコンダクタンスモデルと呼ぶ、 $\{\mu_e : e \in E_d\}$  が独立同分布の時は、熱核が異常拡散現象を示す例がある (Berger-Biskup-Hoffman-Kozma (2008) 参照) が、定理 4.2 の



ような個別不変原理が知られており、さらに  $\mathbb{E}\mu_e < \infty$  の時は  $\sigma > 0$  であり、 $\mathbb{E}\mu_e = \infty$  の時は  $\sigma = 0$  (つまり極限に現れる確率過程は全く動かない (自明な) 過程である) ことが証明されている (Biskup-Prescott (2007), Mathieu-Piatnitski (2007), Barlow-Deuschel (2010), Andres-Barlow-Deuschel-Hambly (2013))。  $\mathbb{P}(\mu_e \geq u) \sim u^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  の時には (これは  $\mathbb{E}\mu_e = \infty$  の特別な場合である) スケーリングをうまくとることで極限過程が異常拡散を示す確率過程になることが知られている。実際、 $d \geq 2$  の時には極限過程は Fractional-Kinetics (FK) process と呼ばれる、対応する熱方程式の時間微分の部分が分数時間微分になるような確率過程になり、 $d = 1$  の時には Fontes-Isopi-Newman (FIN) diffusion と呼ばれる確率過程になる (Barlow-Černý (2011), Černý (2011)) : 詳細は [22, 49] 等を参照のこと。一般の定常エルゴード的なランダムコンダクタンスの場合、 $\mathbb{P}(0 < \mu_e < \infty) = 1$  において Andres-Deuschel-Slowik の一連の研究 ([4] 等) により、コンダクタンスのある種の可積分条件のもと個別不変原理や  $\mathbb{P}$ -a.s. の熱核評価が証明されている。彼らは関数不等式とモーザー型の反復法を用いている。Procaccia-Rosenthal-Sapozhnikov (2016), Sapozhnikov (2016+) は、ランダムインターレースメントを含む、退化したエルゴード的媒質における個別不変原理や熱核のガウス型評価を証明している。

#### 4.2. 臨界確率の場合

次に臨界確率におけるパーコレーション上のランダムウォークを考察する。 $d = 2$  あるいは  $d \geq 19$  のとき (以下に述べる散開モデルでは  $d > 6$  のとき)、 $\theta(p_c) = 0$  である、即ち  $p_c$  では  $\mathbb{P}$ -a.s. に無限クラスターが存在しないことが知られている ; 例えば [32] を参照のこと (Fitzner-van der Hofstad (2016+) は  $d \geq 19$  を  $d \geq 11$  に改良した)。  $d \geq 2$  で常に  $\theta(p_c) = 0$  と予想されているが、これは未だ未解決である。他方、 $p = p_c$  の時には長さ  $n$  のボックス内に高確率でオーダー  $n$  の開クラスターが存在することが知られている。このような、サイズの大きい有限クラスターのメゾスコピックな性質を調べるには、これらを incipient infinite cluster (IIC) と呼ばれる  $\mathcal{G}$  上の無限クラスターの部分集合とみなして、IIC の性質を調べるのが一つの自然な方法である。以下、この IIC  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(w)$  が考えるランダムグラフになる。

IIC は  $d = 2$  の時には、 $\mathcal{C}(0)$  が原点中心長さ  $N$  のボックスの境界と交わるという条件付き確率の  $N \rightarrow \infty$  とした極限として構成された ([43])。高次元の  $\mathbb{Z}^d$  の IIC は、レース展開を用いて構成された (van der Hofstad-Járai (2004) : この結果は、 $d > 6$  において成り立つと考えられている)。同じ論文で、散開モデルの場合には  $d > 6$  の IIC の構成と幾つかの性質の解析がなされている : 散開モデル (spread-put model) は、十分大きい  $L$  について  $y$  が  $x$  中心で長さ  $L$  のボックス内にある時、 $x$  と  $y$  が一つのボンドでつながる確率が  $pL^{-d}$  であるようなモデルである。IIC の測度は以下のように表記できる :

$$\mathbb{P}_{\text{IIC}}(\cdot) = \lim_{d(0,x) \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p_c}(\cdot | 0 \leftrightarrow x). \quad (11)$$

ただし  $\{0 \leftrightarrow x\}$  は、 $0$  と  $x$  が同じ開クラスターにある事象を表す。以下、 $\mathbb{Z}^d$  上の IIC を  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_d(w)$  と記す。 $d_c$  を臨界次元 (ボンドパーコレーションの場合  $d_c = 6$ ) とする時、 $d > d_c$  では  $\mathcal{G}$  の大域的な性質は最近傍モデルでも散開モデルでも変わらないと信じられている。

$Y = \{Y_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathcal{G}$  上の単純ランダムウォーク、 $p_n^\omega(x, y)$  をその熱核とする。序で述べた Alexander-Orbach 予想は、以下のように表される :  $d \geq 2$  について、 $\mathbb{P}_{\text{IIC}}$ -a.e. に

$d_s(\mathcal{G}) = 4/3$ が成り立つ。ここで $d_s$ は(1)で与えられたスペクトル次元である。

次の定理は、Alexander-Orbach 予想が高次元のパーコレーションクラスターにおいては正しいことを示している。

**定理 4.4** ([48]) ある定数 $\alpha > 0$ が存在して、 $d > 6$ なる散開モデルにおいて（最近傍モデルについては $d \geq 19$ において）以下が成り立つ： $\mathbb{P}_{\text{IC}}$ -a.e. な $\omega \in \Omega$ と任意の $x \in \mathcal{G}(\omega)$ について、 $N_x(\omega), R_x(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\log n)^{-\alpha} n^{-\frac{2}{3}} \leq p_{2n}^\omega(x, x) \leq (\log n)^\alpha n^{-\frac{2}{3}}, \quad \forall n \geq N_x(\omega), \quad (12)$$

$$(\log R)^{-\alpha} R^3 \leq E_\omega^x \tau_{B(0, R)} \leq (\log R)^\alpha R^3, \quad \forall R \geq R_x(\omega) \quad (13)$$

が成り立つ。ただし $\tau_A := \min\{n \geq 0 : Y_n \notin A\}$ とする。

次の小節では、この定理をどのように証明するかについて簡単に議論する。

#### 4.2.1. ランダム媒質上の熱核評価

定理3.8（特にその証明）はランダム媒質上のランダムウォークの解析においても有用である。以下に、より一般の定理を挙げる。

$(\mathcal{G}(\omega), \omega \in \Omega)$ を、 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上のランダムグラフとする。さらに $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega$ で、 $\mathcal{G}(\omega)$ は局所有限な連結グラフとし、 $0 \in \mathcal{G}(\omega)$ とする。

各 $\omega$ に対して、それぞれのボンドにコンダクタンス1を置く。 $\{Y_n^\omega\}$ を $\mathcal{G}$ 上の単純ランダムウォークとし、 $B(0, R)$ を、グラフ距離に関する中心0半径 $R$ の球とする。 $B(0, R) \subset \mathcal{G}$ が以下の条件を満たすとき $\lambda$ -goodという：

$$\frac{R^D}{\lambda} \leq \mu(B(0, R)) \leq \lambda R^D, \quad \frac{R}{\lambda} \leq R_{\text{eff}}(0, B(0, R)^c). \quad (14)$$

ここで $D, \lambda \geq 1$ であり、 $R_{\text{eff}}(\cdot, \cdot)$ は(9)で定義した有効抵抗である。

**定理 4.5** ([15])  $R_0, \lambda_0 \geq 1$  and  $q_0 > 0$ が存在して次が成り立つとする：

$$\mathbb{P}(\{\omega : B(0, R) \text{ is } \lambda\text{-good}\}) \geq 1 - \lambda^{-q_0}, \quad \forall R \geq R_0, \lambda \geq \lambda_0. \quad (15)$$

この時、 $c > 0$ が存在して以下が成立する：

$\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega \in \Omega$  と  $x \in \mathcal{G}(\omega)$  について、 $N_x(\omega), R_x(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\log n)^{-c} n^{-\frac{D}{D+1}} \leq p_{2n}^\omega(x, x) \leq (\log n)^c n^{-\frac{D}{D+1}}, \quad \forall n \geq N_x(\omega), \quad (16)$$

$$(\log R)^{-c} R^{D+1} \leq E_\omega^x \tau_{B(0, R)} \leq (\log R)^c R^{D+1}, \quad \forall R \geq R_x(\omega) \quad (17)$$

が成り立つ。特に、 $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$ について $d_s(\mathcal{G}(\omega)) = \frac{2D}{D+1}$ となり、ランダムウォークは再帰的である。さらに、もし(15)が $\lambda^{-q_0}$ の代わりに $\exp(-c_1 \lambda^{q_0})$ で成り立てば、(16)と(17)が、 $(\log \cdot)^{\pm c}$ の代わりに $(\log \log \cdot)^{\pm c}$ として成り立つ。

上記の定理では、体積増大度のオーダーは $R^D$ で抵抗の増大度は線型である。[51]では、これらの増大度が $c_1(R/r)^{\beta_1} \leq f_i(R)/f_i(r) \leq c_2(R/r)^{\beta_2}$ ,  $0 < r < R$ を満たす単調増大な $f_i$ ,  $i = 1, 2$ によって決まる（ただし $0 < \beta_1 \leq \beta_2$ は定数）ような場合に上記の結果を拡張している。この一般化では、(14)に加えて、任意の $z \in B(0, R)$ で $R_{\text{eff}}(0, z) \leq \lambda f_2(d(0, z))$ が成り立つという条件が必要となる。（この条件は、 $f_2(x) = x$ の場合には常に成り立つ。）

**未解決問題 3:**  $d_s \geq 2$ の時、(16), (17)のような熱核評価や脱出時刻の評価を導出するための、検証しやすい十分条件を与えよ。

#### 4.2.2. 定理 4.5 の具体的なモデルへの応用

条件 (15) は、[48] では 2 点関数の評価を用いて証明された。 $x$  と  $y$  が同じ開クラスター内にある時、 $x \leftrightarrow y$  と書くことにしよう。

命題 4.6 臨界確率ボンドパーコレーションにおいて、以下の評価が成り立つとする：

$$c_1|x|^{2-d} \leq \mathbb{P}_{p_c}(0 \leftrightarrow x) \leq c_2|x|^{2-d}, \quad \forall x \in \mathcal{G}(\omega). \quad (18)$$

この時、定理 4.5 の (15) が  $\mathbb{P}_{\text{IC}}$  について  $D = 2$  で成立する。

次元  $d$  が十分高い時、(18) はレース展開を用いて証明されている（散開モデルでは  $d > 6$  で原-van der Hofstad-Slade (2003)、最近傍モデルでは  $d \geq 19$  で原 (2008) による）。これにより定理 4.4 が示される。

定理 4.5 の (15) を証明することで、ランダムウォークの異常拡散が証明されたモデルは他にもいろいろある。以下、そのような例の幾つかを挙げる。(i)-(iii) では  $D = 2$ ,  $d_s = 4/3$  となる。特に (i) では、(15) が  $\lambda^{-q_0}$  ではなく  $\exp(-c_1\lambda^{q_0})$  で成り立つ。

(i) 正則樹木上の臨界確率パーコレーションの IIC ([16])

(ii)  $d \geq 6$  の臨界確率散開有向パーコレーションの IIC ([15])

(iii) 正則樹木のインベージョンパーコレーション ([6])

(iv) 子孫分布が  $\alpha$ -安定分布の吸引域 ( $1 < \alpha \leq 2$ ) に従う臨界確率分枝過程の木の IIC (Croydon-熊谷 (2008))：この時、 $D = \alpha/(\alpha - 1)$ ,  $d_s = 2\alpha/(2\alpha - 1)$  となる。

(v) 二次元一様全域木上の単純ランダムウォーク：この時、 $D = 8/5$ ,  $d_s = 16/13$  となる。 - 5.2 節で詳しく述べる。

[36] は、[48] の結果を一部一般化し、高次元の長距離・短距離パーコレーションの IIC について Alexander-Orbach 予想を肯定的に解決した。

モデル (i) については、[16] でさらに詳しい性質が解明されている。

定理 4.7 正則樹木の IIC 上の単純ランダムウォークの熱核について、以下が成り立つ。

(i) (12), (13) で  $(\log \cdot)^{\pm\alpha}$  の代わりに  $(\log \log \cdot)^{\pm\alpha}$  としたものを満たす。

(ii)  $\mathbb{P}_{\text{IC}}$ -a.e.  $\omega$  について以下を満たす。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\log \log n)^{1/6} n^{2/3} p_{2n}^\omega(0, 0) \leq 2.$$

(iii)  $\mathbb{P}_{\text{IC}}$  について平均を取ったレベルの熱核  $\mathbb{E}_{\text{IC}}[p_{2n}(x, y) | x, y \in \mathcal{G}]$  は、 $d_f = 2, d_w = 3$  として、 $n \geq d(x, y) \vee 1$  において劣ガウス型評価 (2) を満たす。

上の評価で分かるように、 $\mathbb{P}$ -a.s. レベルの熱核には  $\log \log$  オーダーの振動があるが、媒質について平均を取ったレベルではそのような振動はない。 $\mathbb{P}$ -a.s. レベルの詳しい非対角熱核評価も、[16, Theorem 4.9, 4.10] において得られている。

### 4.2.3. 低次元のモデル

低次元のモデルについては、現在までに得られている厳密な結果は限定的である。

最も興味深いモデルの一つは、2次元の臨界確率パーコレーションのIICである。序で述べたように、Kesten は [43] でそのような IIC の存在を証明し、さらに [44] でこの IIC 上のランダムウォークが劣拡散的な挙動を持つことを示した。正確に述べると、 $\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$  を IIC 上の単純ランダムウォークとすると、 $\epsilon > 0$  が存在して、 $\mathbb{P}_{\text{IIC}}$  で見た  $n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}d(0, Y_n)$  の分布が緊密であるという主張である。Kesten の結果の  $\mathbb{P}$ -a.s. レベルへの拡張は、この IIC やインベーションパーコレーションでなされている (Damron-Hanson-Sosoe (2013))。  $\mathbb{Z}^d$  上のボンドパーコレーションの臨界次元は 6 である。Alexander-Orbach 予想は、次元が 5 以下の場合には成立しないと考えられており、シミュレーションの結果 ([19], [39, Section 7.4] 等参照) もこれをサポートしている。このことを厳密に証明することは、特に  $d = 2$  において重要な未解決問題である。

$d < 6$  の有向分枝ランダムウォークの IIC については、原点と第  $n$  世代の間の有効抵抗が、ある  $\gamma > 0$  について  $O(n^{1-\gamma})$  となることが [40] で示されている。このモデルの臨界次元は 4 であるが、 $d = 5$  ですでにランダムウォークの挙動が変わっているのは、ランダムウォークにグラフの有向性が反映されていないためであると考えられる。有効抵抗の厳密な指数は (その存在も含めて) 知られていない。

この他の、低次元ランダム媒質上のランダムウォークの研究例としては、二次元空間の一樣無限三角形分割 (Benjamini-Curien [20], Gurel-Gurevich and Nachmias [33])、ダイヤモンド格子上の臨界確率パーコレーションクラスター (Hambly-熊谷 (2010))、 $\mathbb{Z}^2$  及び  $\mathbb{Z}^3$  上の交わらない二方向ランダムウォークの軌跡 (白石 (2016+)) などが挙げられる。詳しくは、[49, Section 7.4] を参照のこと。

今挙げた二次元の一樣無限三角形分割は、ランダム平面写像 (random planar map) の典型例であり、その共形構造の解析やガウス自由場とのつながりが極めて精力的に研究されている。そのスケール極限はブラウン写像と呼ばれ、収束先の一意性や普遍性などが明らかになりつつある (Le Gall (2007,2013), Miermont (2013))。[33] では一樣無限三角形分割上のランダムウォークの再帰性が示され、[20] ではそのウォーク次元  $d_w$  が 3 以上である、従って異常拡散現象を示すことが示されている (予想は  $d_w = 4$  である)。二次元リウヴィルブラウン運動 ([28]) は、二次元ブラウン運動を、二次元ガウス自由場から決まるリウヴィル測度を使って時間変更した確率過程である。然るべき埋め込みのもと、一樣無限三角形分割上のランダムウォークはリウヴィルブラウン運動に収束すると予想されているが、まだ解決には程遠い。リウヴィルブラウン運動の熱核の評価についても、詳しい研究が進められている ([5, 56])。

未解決問題 4: (i) 低次元の上述のモデルについて、 $d_s$  や  $d_w$  が存在することを示せ。また、これらのモデルでは Alexander-Orbach 予想が成り立たないことを (もし成り立つならば成り立つことを) 示せ。

(ii) 有効抵抗の増大度が線型でないランダム媒質において、有効抵抗指数を計算せよ。

注意 4.8 長距離パーコレーションや、これに関連した長距離相関を持つランダム媒質においても、その上のランダムウォークの熱核評価やスケール極限の研究が徐々に進んでいる。[23, 25] やその中の参考文献を参照のこと。

## 5. ランダム媒質中のランダムウォークのスケール極限

この節では、主にランダム媒質におけるランダムウォークのスケール極限の問題 (Q2) を考える。Croydon (2008) は、臨界確率における分散が有限の分枝過程の作るランダムな木の上の単純ランダムウォークのスケール極限が Aldous 木の上のブラウン運動に収束することを示した (分散が無限の場合の結果は Croydon (2010) を参照のこと)。以下、これ以外の2つの典型例について詳しく解説する。

### 5.1. 臨界確率周辺のエルデシュ・レーニイのランダムグラフ

$V_N := \{1, 2, \dots, N\}$  とおく。エルデシュ・レーニイのランダムグラフは、頂点集合が  $V_N$  の完全グラフ上のパーコレーションである：即ち、各ボンド  $\{i, j\}$ ,  $i, j \in V_N$  は確率  $p \in [0, 1]$  で開いて (つながって) おり、確率  $1 - p$  で閉じて (切れて) おり、ボンドごとに開閉は独立であるようなモデルである。 $\mathcal{C}^N$  を大きさが最大の連結成分とする。このモデルは、 $p \sim c/N$  の周辺で相転移を起こすことが知られている。即ち、以下が高い確率で起こる (Erdős-Rényi (1960))：

$$c < 1 \Rightarrow |\mathcal{C}^N| = O(\log N), \quad c > 1 \Rightarrow |\mathcal{C}^N| \asymp N, \quad c = 1 \Rightarrow |\mathcal{C}^N| \asymp N^{2/3}.$$

ここでは  $\lambda \in \mathbb{R}$  を固定し、 $p = 1/N + \lambda N^{-4/3}$  と取ることで、臨界領域のより細かいスケールを見る。 $p$  がこの臨界領域の中にある場合、全ての  $i \in \mathbb{N}$  について  $i$  番目に大きい連結成分のサイズは  $N^{2/3}$  のオーダーであることが知られている。以下の結果は、(任意の  $i$  について)  $i$  番目に大きい連結成分において成り立つ結果であるが、簡単のため我々は  $\mathcal{C}^N$  の場合に限定して述べる。

ランダムなコンパクト距離空間  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$  が存在し、以下がグロモフ-ハウスドルフの意味で成り立つ：

$$N^{-1/3} \mathcal{C}^N \xrightarrow{d} \mathcal{M}.$$

ここで  $\mathcal{C}^N$  はルート付き距離空間とみなしている (Addario-Berry, Broutin and Goldschmidt (2012) : Aldous (1997) も参照のこと)。 $\mathcal{M}$  を具体的に構成することもできる。 $\{Y_m^{\mathcal{C}^N}\}_{m \geq 0}$  を  $\mathcal{C}^N$  上の単純ランダムウォークとする。この時、以下が成り立つ。

**定理 5.1 ([26])** (i)  $\mathcal{M}$  上のブラウン運動  $\{B_t^{\mathcal{M}}\}_{t \geq 0}$  が存在して以下を満たす：

$$\{N^{-1/3} Y_{[Nt]}^{\mathcal{C}^N}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{M}}\}_{t \geq 0}, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

(ii) 3変数として連続な ((i) のブラウン運動の) 熱核  $p_t^{\mathcal{M}}(\cdot, \cdot)$  と定数  $\theta, T_0, c_1, \dots, c_4 > 0$  が存在して、 $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega \in \Omega$  について以下が成り立つ：

$$p_t^{\mathcal{M}}(x, y) \leq c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1})^\theta \exp \left\{ -c_2 \left( \frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left( \frac{d(x, y)}{t} \right)^{-\theta} \right\}, \quad (19)$$

$$p_t^{\mathcal{M}}(x, y) \geq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1})^{-\theta} \exp \left\{ -c_4 \left( \frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left( \frac{d(x, y)}{t} \right)^\theta \right\}. \quad (20)$$

ここで  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $t \leq T_0$  であり、 $\ell(x) := 1 \vee \log x$ ,  $d_f = 2$ ,  $d_w = 3$  である。

任意の  $p \in [1, \infty]$  について、 $\mathcal{C}^N$  上の単純ランダムウォークの  $L^p$ -混合時間は  $\mathbb{P}$ -分布収束の意味で  $\mathcal{M}$  上のブラウン運動の  $L^p$ -混合時間に収束することも知られている (Croydon-Hambly-熊谷 (2012), Nachmias-Peres (2008)) 参照)。

## 5.2. 2次元一様全域木

$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$  と各頂点間の長さ1のボンドで決まるグラフを考える。このグラフの部分グラフで、 $\Lambda_n$ の全ての点を結び、サイクルのないグラフのことを $\Lambda_n$ の全域木 (spanning tree) と言う。 $U^{(n)}$ を、 $\Lambda_n$ の全域木全体から一様分布に従って取り出したランダムなグラフとする。

Pemantle (1991)は、 $U^{(n)}$ の $n \rightarrow \infty$ での極限を取ることで $\mathbb{Z}^2$ 上の一様全域木 $U$ を定義できることを証明した。 $U$ の分布は (連結境界条件、自由境界条件といった)  $\Lambda_n$ 上の境界条件に依らずに定まることも分かっている。一様全域木 $U$ のもう一つの有用な構成方法は、Wilsonのアルゴリズム (1996) と呼ばれる以下の方法である。まず $\mathbb{Z}^2$ の点に $x_0, x_1, \dots$ と番号付けを行い、 $U(0) = \{x_0\}$ とする。各 $k \geq 1$ について、 $U(k-1)$ が与えられた時 $x_k$ から $U(k-1)$ までループ除去ランダムウォーク (LERW) を走らせ、 $U(k)$ を $U(k-1)$ とこのLERWの軌跡の結びで定める。(LERWは、Lawler (1980)によって導入された確率過程で、単純ランダムウォークからループが出来た順にそのループを除去していくことで構成されるものである。) この時 $U = \cup_{k \geq 0} U(k)$ となる；一様全域木についての詳細は [55] を参照のこと。

$M_n$ を、 $\mathbb{Z}^2$ 上の0から出発するLERWが半径 $n$ の円の外に出るまでにかかるステップ数とする。Lawler (2013)により、 $E^0 M_n \asymp n^{5/4}$ が示されている (より弱い $\lim_{n \rightarrow \infty} \log E^0 M_n / \log n = 5/4$ は、Kenyon (2000)によって示された)。この事実とWilsonのアルゴリズムを合わせると、高い確率で $|B_U(0, R)| \asymp R^{2/(5/4)} = R^{8/5}$ となることが示される (ここで $B_U(x, R)$ はグラフ距離に関する円である)。4.2.2節でも述べたように、[17]では(15)が (従って定理4.5が)  $D = 8/5$ で証明されている。

Schramm [59]は、2次元一様全域木 $U$ のスケール極限の候補になる空間の位相的な性質を解明した。(この論文は、いわゆるSchramm-Loewner発展 (LSE) が初めて世に出た記念碑的な論文である。なお、2次元領域内の一様全域木のスケール極限の一意性は、Lawler-Schramm-Werner [54]によって初めて証明された。) [13]では、一般化されたグロモフ-ハウスドルフ-プロホロフ位相を用いて $U$ の収束を論じている。一様全域木の法則は、測度の入ったルート付き樹木の空間をユークリッド空間に埋め込んだ空間をリスケーリングしたものの中で緊密であることが示されている。 $\mathcal{T}$ を、空間のリスケールが部分列 $\{\delta_i\}_{i \geq 1}$ によって決まるような樹木のスケール極限先とし、 $\rho_{\mathcal{T}}$ をそのルート、 $\phi_{\mathcal{T}}$ を $\mathcal{T}$ から $\mathbb{R}^2$ へのランダムな埋め込み写像とする。 $X^{\mathcal{T}}$ を、 $\rho_{\mathcal{T}}$ から出発するブラウン運動とすると、以下が成り立つ。ここで $X^U$ は、0から出発する $U$ 上の単純ランダムウォークである。

**定理 5.2 ([13])**  $\{(\delta_i X_{\delta_i^{-13/4} t}^U : t \geq 0)\}_{i \geq 1}$ のannealed lawは、 $\phi_{\mathcal{T}}(X^{\mathcal{T}})$ のannealed lawに収束する。さらに、3変数関数として連続な $X^{\mathcal{T}}$ の熱核 $p_t^{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$ が存在して、任意の $R > 0$ と $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega \in \Omega$ について $T_0 > 0$ が存在し、(19)と(20)が ( $\ell(x) := 1 \vee \log x$ ,  $d_f = 8/5$ ,  $d_w = d_f + 1 = 13/5$ として) 全ての $x, y \in B_{\mathcal{T}}(\rho_{\mathcal{T}}, R)$ ,  $t \leq T_0$ で成立する。

この定理に現れた指数 $13/4 = (5/4) \cdot d_w$ は、ユークリッド距離に関するウォーク次元である。

## 6. 結び

以上、複雑な系の上のランダムウォークや拡散過程の異常拡散現象に関する研究の流れを概観した。“理想的な”自己相似なフラクタルでの拡散過程の研究を通じて、この

ようなブラウン運動は概して劣ガウス型の熱核評価を保つことが分かってきた。これにより、ガウス型熱核評価の摂動安定性理論のさらなる拡張として異常拡散現象を示すランダムウォークや拡散過程の安定性理論が研究されるようになった。そして、これらの理論の一部がランダム媒質上のランダムウォークの解析にも拡張できることが分かってきたのである。このような安定性理論は、測度付き距離空間の解析にも新たな展開を与えている。

ランダム媒質の例は豊富にあり、面白い例でその上のダイナミックスの研究が進んでいないものも数多くある。確率論・解析学・数理物理学等の幅広い分野の交流により、さらなる研究の発展が期待される。

## 参考文献

- [1] Abe, Y., Effective resistances for supercritical percolation clusters in boxes, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **51** (2015), 935–946.
- [2] Alexander, S., Orbach, R., Density of states on fractals: “fractons”, *J. Physique (Paris) Lett.* **43** (1982), L625–L631.
- [3] Andres, S., Barlow, M.T., Energy inequalities for cutoff functions and some applications, *J. Reine Angew. Math.* **699** (2015), 183–215.
- [4] Andres, S., Deuschel, J.-D., Slowik, M., Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment, *Ann. Probab.* **43** (2015), 1866–1891.
- [5] Andres, S., Kajino, N., Continuity and estimates of the Liouville heat kernel with applications to spectral dimensions, *Probab. Theory Relat. Fields*, to appear.
- [6] Angel, O., Goodman, J., den Hollander, F., Slade, G., Invasion percolation on regular trees, *Ann. Probab.* **36** (2008), 420–466.
- [7] Barlow, M.T., *Diffusions on fractals*. Lect. Notes in Math. **1690**, Springer, New York, 1998.
- [8] ———, Random walks on supercritical percolation clusters, *Ann. Probab.* **32** (2004), 3024–3084.
- [9] ———, *Analysis on the Sierpinski carpet*. Analysis and geometry of metric measure spaces, 27–53, CRM Proc. Lect. Notes **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [10] Barlow, M.T., Bass, R.F., Stability of parabolic Harnack inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2003), 1501–1533.
- [11] Barlow M.T., Bass, R.F., Kumagai, T., Stability of parabolic Harnack inequalities on measure metric spaces, *J. Math. Soc. Japan* **58** (2006), 485–519.
- [12] Barlow, M.T., Coulhon, T., Kumagai, T., Characterization of sub-Gaussian heat kernel estimates on strongly recurrent graphs, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), 1642–1677.
- [13] Barlow, M.T., Croydon, D., Kumagai, T., Subsequential scaling limits of simple random walk on the two-dimensional uniform spanning tree, *Ann. Probab.*, to appear.
- [14] Barlow, M.T., Hambly, B.M., Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for random walks on percolation clusters, *Electron. J. Probab.* **14** (2009), 1–27.
- [15] Barlow, M.T., Járai, A.A., Kumagai, T., Slade, G., Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions, *Comm. Math. Phys.* **278** (2008), 385–431.
- [16] Barlow, M.T., Kumagai, T., Random walk on the incipient infinite cluster on trees, *Illinois J. Math.* **50** (2006), 33–65.
- [17] Barlow, M.T., Masson, R., Spectral dimension and random walks on the two dimensional uniform spanning tree, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 23–57.

- [18] Barlow, M.T., Perkins, E.A., Brownian motion on the Sierpiński gasket, *Probab. Theory Relat. Fields* **79** (1988), 543–623.
- [19] Ben-Avraham, D., Havlin, S., *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [20] Benjamini, I., Curien, N., Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation: subdiffusivity via pioneer points, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), 501–531.
- [21] Berger, N., Biskup, M., Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters, *Probab. Theory Relat. Fields* **137** (2007), 83–120.
- [22] Biskup, M., Recent progress on the random conductance model, *Probability Surveys* **8** (2011), 294–373.
- [23] Chen, Z.-Q., Kim, P., Kumagai, T., Discrete approximation of symmetric jump processes on metric measure spaces, *Probab. Theory Relat. Fields* **155** (2013), 703–749.
- [24] Chen, Z.-Q., Kumagai, T., Wang J., Stability of heat kernel estimates for symmetric jump processes on metric measure spaces, arXiv:1604.04035.
- [25] Crawford, N., Sly, A., Simple random walks on long range percolation clusters  
I: heat kernel bounds, *Probab. Theory Relat. Fields* **154** (2012), 753–786.  
II: scaling limits, *Ann. Probab.* **41** (2013), 445–502.
- [26] Croydon, D.A., Scaling limit for the random walk on the largest connected component of the critical random graph, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **48** (2012), 279–338.
- [27] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M., *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. de Gruyter, Berlin, 2011 (2nd Edition).
- [28] Garban, C., Rhodes, R., Vargas, V., Liouville Brownian motion, *Ann. Probab.*, to appear.
- [29] De Gennes, P.G., La percolation: un concept unificateur, *La Recherche* **7** (1976), 919–927.
- [30] Grigor’yan, A., *Heat kernel and analysis on manifolds*. Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
- [31] Grigor’yan, A., Telcs, A., Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces, *Ann. Probab.* **40** (2012), 1212–1284.
- [32] Grimmett, G., *Percolation*. Springer, Berlin, 1999 (2nd Edition).
- [33] Gurel-Gurevich, O., Nachmias, A., Recurrence of planar graph limits, *Ann. of Math. (2)* **177** (2013), 761–781.
- [34] Hattori, K., Hattori, T., Kusuoka, S., Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket, *Probab. Theory Relat. Fields* **84** (1990), 1–26.
- [35] Hattori, K., Mizuno, M., Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket, *Stoch. Proc. Their Appl.* **124** (2014), 566–585.
- [36] Heydenreich, M., van der Hofstad, R., Hulshof, T., Random walk on the high-dimensional IIC, *Comm. Math. Phys.* **329** (2014), 57–115.
- [37] Hino, M., Martingale dimensions for fractals, *Ann. Probab.* **36** (2008), 971–991.
- [38] 日野正訓, デイリクレ形式における指数, *数学*, **66** (2014), 61–977.
- [39] Hughes, B.D., *Random walks and random environments, volume 2: random environments*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [40] Járai, A.A., Nachmias, A., Electrical resistance of the low dimensional critical branching random walk, *Comm. Math. Phys.* **331** (2014), 67–109.
- [41] Kajino, N., Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket, *Contemporary Mathematics* **600** (2013), 91–133.
- [42] ———, The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics, *in preparation*.



- [43] Kesten, H., The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation, *Probab. Theory Relat. Fields* **73** (1986), 369–394.
- [44] ———, Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **22** (1986), 425–487.
- [45] Kigami, J., *Analysis on fractals*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [46] ———, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.
- [47] ———, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.
- [48] Kozma, G., Nachmias, A., The Alexander-Orbach conjecture holds in high dimensions, *Invent. Math.* **178** (2009), 635–654.
- [49] Kumagai, T., *Random walks on disordered media and their scaling limits*. Lect. Notes in Math. **2101**, Springer, New York, 2014.
- [50] ———, Anomalous random walks and diffusions: From fractals to random media, Proceedings of the ICM Seoul 2014, Vol. IV, 75–94, Kyung Moon SA Co. Ltd. 2014.
- [51] Kumagai, T., Misumi, J., Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media, *J. Theoret. Probab.* **21** (2008), 910–935.
- [52] Kusuoka, S., *Diffusion processes on nested fractals*. Lect. Notes in Math. **1567**, Springer, New York, 1993.
- [53] ———, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. RIMS.* **25** (1989) 659–680.
- [54] Lawler, G.F., Schramm, O., Werner, W., Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004), 939–995.
- [55] Lyons, R., Peres, Y., *Probability on trees and networks*. Cambridge University Press, 2016. Available at <http://pages.iu.edu/~rdlyons/>.
- [56] Maillard, P., Rhodes, R., Vargas, V., Zeitouni, O., Liouville heat kernel: regularity and bounds, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, to appear.
- [57] Mathieu, P., Piatnitski, A., Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters, *Proc. Roy. Soc. A* **463** (2007), 2287–2307.
- [58] Saloff-Coste, L., *Aspects of Sobolev-type inequalities*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [59] Schramm, O., Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000), 221–288.
- [60] Sidoravicius, V., Sznitman, A.-S., Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances, *Probab. Theory Relat. Fields* **129** (2004), 219–244.
- [61] Strichartz, R.S., *Differential equations on fractals: a tutorial*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [62] Telcs, A., *The art of random walks*. Lect. Notes in Math. **1885**, Springer, New York, 2006.