整数論の近年の発展をふりかえって

加藤和也（シカゴ大学）

ついこの間までは、数学の集会に出るとまわりの人はみな私よりも年上だったと思うのです。それがふと気がつくといつのまにやらお年寄りに分類される年になっています。私が学生時代に読んで勉強をし影響を受けた本の著者の先生方も、お年を召され、彼岸に旅立たれた方もいらっしゃいます。日本数学会が設立された時、理事長でいらっしゃった正田建次郎先生、議長でいらっしゃった矢野健太郎先生の、書かれた本を学生の頃勉強いたしました。その頃はお二人ともご健在でいらっしゃったのでした。尊敬申し上げました岩澤健吉先生が亡くなられてから、思えば早いものでもう 18 年が経ちました。また、同級生の大切な友達も亡くしました。

漢詩の有名な一節「年々歳々花相似たり、歳々年々人同じからず」が思われます。しかし、「人同じからず」というその人々のたゆまぬ努力のかいあって、数学には、年々、新しいより大きな花が育ち開いて行きます。数学会設立 70 周年ということで、手から手へバトンタッチのされる数学の歴史を思いながら、整数論の近年の発展について私の見て来たことを振りかえってみたいと思います。ただ、整数論と言っても私のわかる範囲は広くなく、私が親しんだ方面のみの紹介になり、個人的な思い出話のようにもなりますことを、あらかじめおことわりいたします。

§1. 類体論から非可換類体論へ

この頃の整数論でことにめざましかったのは、類体論の拡張版である非可換類体論、すなわち Langlands 対応の理論がどんどん発展したことであろうと思います。1995 年には非可換類体論を大きく発展させた Wiles がそれを用いて Fermat の最終定理を証明しましたし、さらにその研究を発展させた Taylor （とその共同研究者たち）により、2006 年から 2011 年にかけて佐藤 –Tate 予想が証明されました。これらは解決できるとは想像もできなかった事柄です。もともと整数論の最高の理論であった類体論が、非可換類体論へと進化することでますますパワーアップし、大変な進展が整数論にもたらされることとなっています。

私は学生の頃、高木貞治先生の著書「代数的整数論」を読みました。その本の後半に類体論の説明がありました。類体論という整数論の最高の理論があり、それは高木貞治さんが作られたのだということを知りました。そんなすごい理論ができたのなら、整数論はもうあとはやることは落ち穂拾いくらいしかなくなったのかなあとか思いました。それは愚かなことでしたが、類体論は越えて行くのが困難なものだったということは本当で、こうやって自分の生きている間に類体論が大きく拡張される様子を見る事ができるとは、その進展で Fermat の最終定理が証明されるなどとは、想像もできませんでした。

類体論と非可換類体論の歴史を簡単に（非常にざっと）まとめてみます。

17 世紀 Fermat（素数と平方和）
18 世紀末 Gauss（平方剰余の相互法則）

19 世紀　Kummer（高次相互法則）、Weber（類体の考え）、Hilbert（不分岐類体論の定式化）

20 世紀　高木（類体論の完成）、Langlands（非可換類体論の定式化）、Wiles（Fermat の最終定理）

21 世紀初め　Taylor（佐藤–Tate 予想）

簡単に説明を述べます。類体論の幕開けは 17 世紀の Fermat の研究によってもたらされました。Fermat は

$$5 = 2^2 + 1^2, \quad 13 = 3^2 + 2^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2$$

のように、4 でわると 1 余る素数 $5, 13, 17, \ldots$ は $x^2 + y^2$ (x, y は整数）の形に表されるが、4 でわると 3 余る素数 $3, 7, 11, \ldots$ はそのように表せない、ということを発見しました。上の式は虚数単位 i を用いて

$$5 = (2+i)(2-i), \quad 13 = (3+2i)(3-2i), \quad 17 = (4+i)(4-i)$$

と書けるので、この Fermat の発見は、4 でわると 1 余る素数は体 $\mathbf{Q}(i)$ で二つに分解し、4 でわると 3 余る素数は体 $\mathbf{Q}(i)$ で分解しない、ということだと解釈されます。Fermat はまた

$$7 = 3^2 - 2 \times 1^2, \quad 17 = 5^2 - 2 \times 2^2, \quad 23 = 5^2 - 2 \times 1^2$$

のように、8 でわると 1 または 7 余る素数 $7, 17, 23, \ldots$ は $x^2 - 2y^2$ (x, y は整数）の形に表されるが、8 でわると 3 または 5 余る素数 $3, 5, 11, \ldots$ はそのように表せない、ということを発見しました。上の式は

$$7 = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}), \quad 17 = (5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2}), \quad 23 = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$$

と書けるので、これは、8 でわると 1 または 7 余る素数は体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で二つに分解し、8 でわると 3 または 5 余る素数は体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で分解しない、ということだと解釈されます。このように Fermat の発見は、$\mathbf{Q}(i)$ や $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ における素数の分解法則を与えています。

類体論は簡単に言えばこういう素数の分解法則であります。もっと正確には次のように、素イデアルの分解法則です。

一般に K を代数体（有理数体の有限次拡大体）、L を K の有限次拡大体とし、K の素イデアル（正確には、K の整数環の 0 でない素イデアル）が L でどう分解するかという問題を考えます。K が有理数体 $\mathbf{Q}$ の場合、 K の素イデアルとは素数のことですから、上では、$K = \mathbf{Q}$ で、L が $\mathbf{Q}(i)$ または $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ の場合を考えています。類体論は、L が代数体 K の Abel 拡大、すなわち Galois 拡大で Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ が可換群である場合に、上のような分解法則が見事に現れる、というものです。$\mathbf{Q}(i)$ や $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ は、$\mathbf{Q}$ の、Galois 群が $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と同型な Abel 拡大になっています。

素イデアルは大切なので、その分解法則は大変重要になります。

類体論は偉大な理論ですが、その欠点は、Abel 拡大にしか通用しないことでした。たとえば、$K = \mathbf{Q}, L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ とすると、L は K の Abel 拡大ではないので類体論は通用せず、素数が $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ でどう分解するかが類体論からはわかりません。$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ は $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ (ここに ζ_3 は 1 の原始 3 乗根）の部分体ですが、$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ は $\mathbf{Q}$ の Galois 拡大で、その Galois 群は非可換群であり、3 次の対称群と同型です。非可換な Galois 群を持つ Galois 拡大にもその部分拡大体にも、類体論を拡張したい、という、「非可換類体論」を作ることは、長い間どうすればかなえられるのか誰にもわからない夢でした。

類体論が高木先生によって作られた 1920 年から約 50 年後になって、Langlands が、非可換類体論の姿はこうあるべきだという予想を立てました。それは保型形式を用いるものでした。

そして 1995 年になって、Wiles がその非可換類体論で大きな進展を得て、Fermat の最終定理を証明しました（[14]）。

非可換類体論をひとことで言うと、「代数的な存在である整数論的な対象と、解析的な存在である保型形式が、ゼータ関数が一致する、ということによって（双方が違う世界に住むもので、関係無いように見えるにもかかわらず）対応する」ということになろうかと思います。

$$\text{整数論的対象（代数的）} \quad \overset{\text{ゼータ関数の一致}}{\longleftrightarrow} \quad \text{保型形式（解析的）}$$

これをもっと正確な完全な形で説明することはなかなか困難なことですので、「ゼータ関数が一致する」という 4 つの式を例として出すことで、これを説明することにします。

(1) $\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) = \zeta(s)L(\chi, s), \quad \zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})}(s) = \zeta(s)L(\chi', s)$

(2) $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})}(s) = \zeta(s)L(h, s)$

(3) $L(E, s) = L(f, s)$.

上の (1), (2) で式の左辺は、代数体の Dedekind ゼータ関数を表します。(1), (2) の式の右辺で、$\zeta(s)$ は Riemann ゼータ 関数を、(1) の右辺で χ, χ' は Dirichlet 指標

$$\chi : (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{\times} \to \{\pm 1\}\ ;\ \chi(1) = 1,\ \chi(3) = -1$$

$$\chi' : (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^{\times} \to \{\pm 1\}\ ;\ \chi'(1) = \chi'(7) = 1,\ \chi'(3) = \chi'(5) = -1$$

を、$L(\chi, s)$, $L(\chi', s)$ はそれらの ゼータ関数（Dirichlet L 関数）を、(2) の右辺の h は保型形式 $\eta(6z)\eta(18z)$ （ここに $\eta(z)$ は Dedekind のエータ関数）を、$L(h, s)$ は h のゼータ関数を表します。また、(3) の左辺は有理数体上の楕円曲線 E のゼータ関数を、右辺は E に対応する保型形式 f のゼータ関数を表します。

先に述べた $\mathbf{Q}(i)$ や $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ における素数の分解の法則は、それぞれ (1) の二つの式として表されます。どうして $\mathbf{Q}(i)$ における素数の分解の法則が (1) の最初の式で説明されるか、を手短かに述べます。Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$, Dirichlet L 関数 $L(\chi, s)$ は素数 p が走るときの積として

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad L(\chi, s) = \prod_{p \neq 2} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

と表されます。一方代数体 F の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_F(s)$ は、F の素イデアル $\mathfrak{p}$ が走るときの積として、$\prod_{\mathfrak{p}}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ と表されます。（ここで $N(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ のノルムですが、ノルムの説明は省略。）そのように素数や素イデアルについての積なので、素数の分解の様子をこういうゼータ関数の話としてとらえられることになります。(1) の最初の式の右辺を素数についての積と見るとき、素数 p に関する所は、p が 4 でわって 1 余る素数なら $\chi(p) = 1$ なので、$(1 - p^{-s})^{-1}(1 - p^{-s})^{-1}$ となり、p が 4 でわって 3 余る素数なら $\chi(p) = -1$ なので、$(1 - p^{-s})^{-1}(1 + p^{-s})^{-1} = (1 - p^{-2s})^{-1}$ となります。このように p が 4 でわって 1 余るか 3 余るかで、右辺の p に関する部分の形が異なります。左辺を素イデアルについての積と見てこれと比べるとき、式 (1) の最初の式の素数 p がかかわる所は

次のように理解されます。p が 4 でわって 1 余る素数なら $\mathbf{Q}(i)$ には p をわりきる素イデアルが二つ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ とあって、$(1-N(\mathfrak{p}_1)^{-s})^{-1}(1-N(\mathfrak{p}_2)^{-s})^{-1} = (1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}$, $N(\mathfrak{p}_1) = N(\mathfrak{p}_2) = p$ である。p が 4 でわると 3 余る素数なら、$\mathbf{Q}(i)$ には p をわりきる素イデアル $\mathfrak{p}$ がただ一つあって、$(1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = (1-p^{-2s})^{-1}$, $N(\mathfrak{p}) = p^2$ である。

(1), (2), (3) の式のうち、(1) が類体論に、(2), (3) が非可換類体論に属します。(2) は $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ における素数の分解の様子が、保型形式 $\eta(6z)\eta(18z)$ を見ればわかる、というもので、(1) の、$\chi(p)$ や $\chi'(p)$ を見ればわかる、という話の非可換類体論版になっています。Dirichlet 指標 χ や χ' は、 保型形式の一種と見なすことができ、保型形式論において「 $GL(1)$ の保型形式」と呼ばれます。(2) や (3) に現れる保型形式 h や f は、ふつうに言われる保型形式で、上半平面上の正則保型形式というものであり、保型形式論において「 $GL(2)$ の保型形式」と呼ばれます。

(3) は、谷山豊先生と志村五郎先生の谷山–志村予想 (非可換類体論の一部と見なされる) を述べたもので、有理数体上の楕円曲線 E に対し、保型形式 f が定まり、$L(E,s) = L(f,s)$ となる、つまり、それらのゼータ関数が一致する、という予想でした。楕円曲線とは、$y^2 = (x$ の 3 次式) (ただし、右辺の 3 次式は重根を持たない) という形の式で表される代数曲線のことです。Wiles は谷山–志村予想を、楕円曲線に少し仮定を付けて証明しました。(その仮定は後の人々の努力により、必要なくなりました。Fermat の最終定理の証明をするにはその仮定を付けても、大丈夫でした。) Fermat の最終定理は、よく知られておりますように、$n \geq 3$ のときは $a^n + b^n = c^n$ となる 0 でない整数 a, b, c は存在しない、というもので、Fermat が 17 世紀に言明し、350 年の間、様々の試みにもかかわらず誰も証明できずにいたものでした。Wiles が、谷山–志村予想について成果を得たことで、それを用いて Fermat の最終定理を証明した要領を、流れ図で簡単に説明すると次のようになると思います。

$a^n + b^n = c^n$ は奇妙である。$\longrightarrow$ 楕円曲線 $y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)$ は奇妙である。$\longrightarrow$ その楕円曲線に対応する保型形式 f は奇妙である。$\longrightarrow$ そんな奇妙な f は存在しない。$\longrightarrow$ もとの a, b, c は存在しない。

$a^n + b^n = c^n$ は奇妙である、というのは、あまりにもきれいな式すぎるということです。そういう美的感覚での説明では十分な説明とは言えませんが、上で奇妙であるというのが、数学的にどう奇妙であるかの説明は略します。保型形式の方が楕円曲線よりも調べやすく (解析的な方法を用いる事ができる)、奇妙なものが存在しないという話は、これこれこういう奇妙な正則関数は存在しない、という話になって証明できるのです。整数の問題である Fermat の最終定理が、保型形式という正則関数の、ずっと調べやすい解析的な話に変換されるのです。非可換類体論が、代数的な世界と解析的な世界を結びつける、ということのすごさがここにあります。

次に佐藤 –Tate 予想を紹介します。完全に一般な形でなく、楕円曲線がかかわる部分のみを述べます。E を有理数体上の楕円曲線とすると、そのゼータ関数は

$$L(E,s) = \prod_p (1-\alpha_p p^{-s})^{-1}(1-\beta_p p^{-s})^{-1}, \quad |\alpha_p| = |\beta_p| = \sqrt{p}, \quad \alpha_p\beta_p = p$$

の形に素数 p が走るときの積として書けます。(これは正確ではなくて、有限個の素数 p に関わる所は修正が必要ですが、ややこしい話になるので、雑な話をすることをお認めください。) α_p, β_p は複素数で、上に書いてありますように絶対値が $\sqrt{p}$ であるとわかっています。しかし、複素数としての偏角は色々です。$\alpha_p\beta_p = p$ ですから、α_p, β_p の一方の偏角 θ_p は $0 \leq \theta_p \leq \pi$ の範囲にあり、もう一方は $-\theta_p$ となります。佐藤 –Tate 予想は

この偏角 θ_p の、p が走るときの分布に関するもので、1960 年頃佐藤幹夫先生と Tate によって提唱された次の予想です。

佐藤 –Tate 予想 :
実数 a, b で $0 \leq a \leq b \leq \pi$ となるものをとる。実数 $x > 0$ に対し x 以下のすべての素数の個数を $A(x)$, x 以下の素数 p で $a \leq \theta_p \leq b$ となるものの個数を $B(x)$ とおくと、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin^2(t)dt$$

となる。

（正しくは、E は虚数乗法を持たないと仮定しないといけません。）

Taylor が（共同研究者とともに）非可換類体論を押し進めて佐藤–Tate 予想を証明したのは、次のようなやりかたでした（[12], [1]）。各整数 $r \geq 1$ に対し、$L(E, s)$ の変更版であるゼータ関数 $L_r(E, s)$ を、

$$L_r(E, s) = \prod_p \prod_{i=0}^{r} (1 - \alpha_p^i \beta_p^{r-i} p^{-s})^{-1}$$

と定義します。$L_1(E, s) = L(E, s)$ です。（有限個の素数の所ではこれは正確ではないです。）Taylor は、すべての整数 $r \geq 1$ に対し、$GL(r + 1)$ の保型形式 f_r で $L_r(E, s) = L(f_r, s)$ となる、つまり、ゼータ関数が一致する、ものがあることを証明しました（これも正確な話ではありませんが雑な点のある説明をお許しいただきたいと思います。）そのことから佐藤–Tate 予想が正しいことを導きだすことができます。というのは、楕円曲線のゼータ関数ということからは、θ_p の分布という解析的な考察はとてもできないのですが、それが保型形式という解析的なもののゼータ関数ということになれば、解析的な考察を押し進める事ができるのです。ここにも、非可換類体論が、代数的な世界と解析的な世界を結びつける、ということのすごさがあります。

類体論が非可換類体論になってすごみを増したことの一つに、(詳しい説明は略しますが) 表現論と関わることになったということもあります。ここで表現論というのは、たとえば、回転群 $SO(3, \mathbf{R})$ の既約表現にはどういうものがあるか、というような話で、$SO(3, \mathbf{R})$ の既約表現は私が学生時代に本で読んだ記憶がまちがっていなければ、1 次元のもの（自明表現）、 3 次元のもの（3 次元空間にそのまま回転として作用するもの）、5 次元のもの、7 次元のもの、.... と、各奇数次元に一つずつあります。$SO(3, \mathbf{R})$ や $GL(n, \mathbf{R})$ や $GL(n, \mathbf{Q}_p)$ ($\mathbf{Q}_p$ は p 進数体）などの群の既約表現の分類は、非可換類体論の局所理論と見なすことができるのです。学生の頃整数論の本を読んでその存在を知った類体論と、別の方面の本を読んでかいまみた表現論が、統合されるものであるとは、まったく私の想像外のことでした。素数の分解法則である類体論と $SO(3, \mathbf{R})$ の表現の理論という異質なもの、それが類体論が非可換類体論に拡張されると結びつくのです。これは私にとりましては、ただただ驚くばかりです。

非可換類体論での日本の人の貢献はいろいろありますが、志村五郎先生は類体論から非可換類体論への大きな流れを開かれました。また上記の Wiles の大仕事は、§2 にふれますように、岩澤理論の手法によるものでした。肥田晴三氏、藤原一宏氏の貢献もよく知られています（お二人の国際数学者会議での招待講演は、[3], [2]）。また、近年の非可換類体論では、複素数体上の代数多様体に関する Hodge 理論の、$\mathbf{Q}_p$ 上の代数多様体についての類似物である、 p 進 Hodge 理論が、重要な道具となっていますが、p 進 Hodge 理

論での決定的な仕事は辻雄氏の論文 [13] です。私が若い頃は p 進 Hodge 理論はまだ少年期にありました。

非可換類体論は、まだまだ未完の理論で、いろいろな予想が解決されていません。整数論の最高の理論であった類体論の拡張ですから、重要なものであり、これからもその進展が、整数論に大きな成果をもたらしていくと思われます。

§2. 岩澤理論の発展

岩澤理論は、1950 年代に岩澤健吉先生が始められた理論で、類体論と並ぶ代数的整数論の重要な理論となりました。

岩澤理論の神秘は、ゼータ関数の値がどんな整数論的な意味を持つのか、を語るところです。たとえば、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の値は、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$$

などとなります（π は円周率）が、これらの値には深い整数論的な意味がしまわれているのです。この $\zeta(12)$ の分子に素数 691 が現れていますが、これは、代数体 $\mathbf{Q}(\zeta_{691})$ (ζ_n は 1 の原始 n 乗根）のイデアル類群の、ある特別な性質を持つ部分が 0 でないことを表し、そのイデアル類群の位数が 691 でわりきれることなどを表しています。

代数体 F のイデアル類群は、F の整数環 O_F が単項イデアル整域でない具合を表すようなもので、O_F の 0 でないイデアルの間に同値関係を、 $I \sim J$ とは $I = aJ$ となる $a \in F$ が存在すること、として入れた同値類の集合が、乗法についてなす有限群です。単項イデアルたちは一つの類をなし、イデアル類群の単位元になります。O_F が単項イデアル整域であることは、F のイデアル類群が 単位元のみからなることと同値です。単項でないイデアルが O_F に存在することが整数論をややこしく困難にする原因となりますから、F のイデアル類群が大きければ大きいほど F の整数論を論じるのは困難になり、イデアル類群はそういう「悲しいもの」と言えます。しかし逆に言えば、F のイデアル類群のことがよくわかれば F の整数論がよくわかるわけで、イデアル類群は大事になります。そして岩澤理論は、このイデアル類群がゼータ関数の値と神秘的な関係を持っていることを語っており、イデアル類群は忌み嫌うべき「悲しい群」ではなくて、整数論の不思議さを味わわせてくれる「喜びの群」であるということになります。悲しみがあれば喜びもあるんだよ、イデアル類群はそのように人生への暖かい慰めを語ってくれているのかもしれません。

Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数の値と $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ のイデアル類群の間に不思議な関係があるという岩澤主予想を、岩澤先生が 定式化し研究しました。19 世紀に、代数体 F のイデアル類群の元の個数である「類数」と、F の Dedekind ゼータ関数を結びつける、類数公式と呼ばれる等式が証明されましたが、20 世紀の岩澤主予想はそれを深めるものでした。1960 年頃、素数 p ごとに、Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数の値を用いて p 進ゼータ関数というものが、久保田富雄先生と Leopoldt によって定義されました。私は学生の頃、久保田先生の本でも整数論の勉強をしました。岩澤主予想は、雑に言うと

p 進ゼータ関数 = 「$\mathbf{Q}(\zeta_n)$ のイデアル類群の p べき部分に $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q})$ が作用する様子を n を動かして考えたもの」

という精神の、等式の形をした予想になります。19 世紀の類数公式よりも深い所は、イデアル類群への Galois 群の作用が考慮されている所です。岩澤主予想は、Mazur と Wiles により、1984 年発表の論文で証明されました。

近年の岩澤理論の大きな成果としては、楕円曲線のゼータ関数や、保型形式のゼータ関数の岩澤理論が発展したということがあります。ことに、$GL(2)$ の保型形式のゼータ関数に関する岩澤主予想（こちらは岩澤先生が直接定式化したものではありませんが、もとの岩澤主予想と同じ精神で定式化されるので岩澤主予想と呼ばれる）は、Skinner と Urban によって 2014 年の論文で証明されました（[11]）。有理数体上の楕円曲線のゼータ関数は、谷山–志村予想の解決により $GL(2)$ の保型形式のゼータ関数と一致しますから、これは有理数体上の楕円曲線の岩澤理論を含みます。

もともとの岩澤主予想では、ゼータ関数の値とイデアル類群の関係が問題になりましたが、こういう一般化された岩澤主予想では、ゼータ関数の値と、楕円曲線の有理点の群や、種々の Selmer 群と呼ばれるイデアル類群をもっと一般化した群との、関係が問題になります。Birch–Swinnerton-Dyer 予想と呼ばれる大きな予想があって、有理数体上の楕円曲線 E について、「E の有理点のなす Abel 群 $E(\mathbf{Q})$ の階数（ $E(\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}^r \oplus$ (有限群) となる、その r) がゼータ関数 $L(E,s)$ の $s=1$ での零点の位数に等しい」という予想です。楕円曲線の岩澤理論の進展は Birch–Swinnerton-Dyer 予想の研究に大きな進歩をもたらし、Birch–Swinnerton-Dyer 予想は今は、$L(E,s)$ の $s=1$ での零点の位数が 1 以下の場合には証明されています。

非可換類体論の、$GL(n)$ の保型形式が登場する部分を、「$GL(n)$ の非可換類体論」と呼び、一般化された岩澤理論の、$GL(n)$ の保型形式のゼータ関数の値が考察される部分を「$GL(n)$ の岩澤理論」と呼ぶことにします。類体論は $GL(1)$ の非可換類体論、もともとの岩澤理論は、$GL(1)$ の岩澤理論ということになります。どちらも $GL(n)$ へと発展中です。 $GL(2)$ の非可換類体論が Fermat の最終定理を証明した Wiles の研究を突破口にだいぶ完成に近づき、上に述べたように Skinner と Urban によって $GL(2)$ の岩澤主予想が証明されました。

非可換類体論と岩澤理論は、助け合いながら発展しています。上に述べた Mazur–Wiles による $GL(1)$ の岩澤主予想の証明は、$GL(2)$ の非可換類体論の一部を研究することによってなされました。また、Fermat の最終定理の証明に至った Wiles による $GL(2)$ の非可換類体論の発展は、$GL(3)$ の岩澤主予想の特別な場合を証明することでなされました。上に述べた Skinner と Urban による $GL(2)$ の岩澤主予想の証明は、$GL(4)$ の非可換類体論の一部を研究することによってなされました。

Wiles は、岩澤理論の研究から、研究生活を始めました。その師匠である Coates と 1977 年に Birch–Swinnerton-Dyer 予想についての画期的な仕事を、（楕円曲線版の）岩澤理論を研究することでなしました。 Coates は「岩澤主予想」という名前を付けた人です。この Coates さんが、日本の源氏物語や昔の和歌や陶磁器から、岩澤理論研究のためのインスピレーションを得て来たことはよく知られていますが、これは氏の岩澤先生への尊敬の念が、日本文化への愛につながっているような気がします。別の所にも書いたことですが、Coates さんと奈良県に行き、電車が鉄橋を渡った時、Coates さんが、「サホガワー、サホガワー」と叫び始めたことがあります。川の岸に立つローマ字表記の川の名前を見て、愛読する日本の昔の和歌に何度も出てくる川を目のあたりにした感動で叫んでいたのでした。Coates さんのこのご様子に私は大変感動いたしました。

佐保川の清い流れを愛する心とゼータの値を愛する心は似ている所があるのでしょう、岩澤先生の影響もあって日本では岩澤理論が盛んです。岩澤先生は 1987 年に日本に戻られてから、日本の若い人々とセミナーをされ、良い影響を与えられました。私もその頃から、岩澤先生にお見せできることを楽しみに $GL(2)$ の岩澤理論の研究に励みました。そして $GL(2)$ の岩澤主予想の等式を証明するための、一方向の不等式を得ました（[5]）が、それは私の人生で最良の仕事になりました。(Skinner–Urban [11] は、逆の方向の不等式

を証明して、$GL(2)$ の岩澤主予想の証明を完成させました。）岩澤先生が私に「栗原君が始めた仕事、立派だと思うんですが知っていますか」と、栗原将人氏による「岩澤主予想の精密化」の仕事 ([8]) のことを話されたことがありますが、栗原氏も岩澤先生のセミナーの世話係をして岩澤理論に入って行ったのでした。

岩澤先生ともっといろいろお話をできるものと思っておりました。

§3. 新しい発展

もっといろいろ近年の整数論の発展を紹介したいのですが、時間も能力も限られていますので、私自身が研究したことのある分野に限らせていただいて、そこで、めざましい発展があったので、それを紹介します。斎藤秀司氏と斎藤毅氏の仕事です。これから紹介します分野に関しては、私はかつてこのお二人と共同研究をしたことがあったのですが、今ではすっかりお二人に置いてけぼりにされて、ただお二人のご活躍を眺めるばかりなのですが、これは日本数学会の発足７０年の講演会でありますし、日本のお二人の良い仕事なので、ご紹介いたしたいと思います。

２０世紀初期の、整数論の特に大きな業績として、一つは類体論、もう一つは、Brauer–Hasse–Noether の、代数体の Brauer 群の決定があると思います。Brauer 群は斜体（可換と限らない体）を分類するもので、たとえば実数体 $\mathbf{R}$ 上の有限次元の斜体で中心が $\mathbf{R}$ であるもの（中心とは、すべての元と可換な元全体）は、ただ二つ、四元数体と、実数体自身ですが、これは実数体の Brauer 群が二つの元からなることを示しています。Brauer–Hasse–Noether は、代数体の Brauer 群を決定しました。すなわち、代数体を中心とする有限次元の斜体を分類しました。

代数体の Abel 拡大についての類体論と、代数体上の斜体についての Brauer–Hasse–Noether の定理は、並べて考えるとよい重要な二つの理論のように思えます。

この類体論と、Brauer–Hasse–Noether の定理が、斎藤秀司氏と Kerz の最近の共同研究 ([7], [6]) で、それぞれ、自然な形に一般化されました。まず類体論の一般化ですが、これは、先にのべた非可換類体論の方角への類体論の拡張ではなく、代数体の Abel 拡大を考察する類体論を、もっと一般の体の Abel 拡大の理論に拡張するものです。それは、K を、$\mathbf{Q}(T_1, \ldots, T_n)$ の有限次拡大体または $\mathbf{F}_p(T_1, \ldots, T_n)$ の有限次拡大体とするとき、K の Abel 拡大に関する理論として、類体論を一般化するものです。昔、斎藤秀司氏と私がいっしょに研究をしたテーマなのですが、[7] において、それがはるかに立派な形に精密化されました。また、Brauer–Hasse–Noether の定理の一般化 [6] の方は、そういう体 K の (Brauer 群を一般化した）Galois コホモロジー群についての定理に拡張するものです。

宇宙人に会ったとき、今日までの地球の整数論の歴史を

類体論 (２０世紀） $\to$ 斎藤–Kerz の仕事 [7] (２１世紀）
Brauer–Hasse–Noether の仕事 (２０世紀） $\to$ 斎藤–Kerz の仕事 [6] (２１世紀）

というふうに簡潔にまとめて説明すると、説明が簡単でいいかもしれません。しかし、これは先に述べた非可換類体論や岩澤理論の発展も完全に抜け落ちているし、これを整数論の総まとめとするのはさすがに不適切のように思われます。が、この斎藤–Kerz の仕事は、代数体上の代数多様体の上の代数的サイクルの群の研究などに大きな力を発揮しています。もとの類体論も Brauer–Hasse–Noether の仕事も、すごい理論ですから、それの拡張であるこれらの仕事も影響の大きい仕事だと思われます。

次に斎藤毅氏の、分岐理論における特性サイクルの理論の完成（[10]) を紹介します。これは分岐理論において Grothendieck や Deligne が夢見たことの達成です。佐藤幹夫先

生が柏原正樹氏，河合隆裕氏とともに作り上げた D 加群の理論の中の、一つの華と言える特性サイクルの理論を、整数論に使える形に深化させたものでもあります。

分岐理論の大切さをまず説明します。先に類体論の説明をしましたとき、4 でわると 1 余る素数は $\mathbf{Q}(i)$ で二つに分解し、4 でわると 3 余る素数は分解しないと言いましたが、ここには素数 2 の話が抜けています。2 は $\mathbf{Q}(i)$ において、$2 = -i(1+i)^2$ と、重複が現れます（ $1+i$ が重複して現れる)。こういう重複の現れることを 2 が $\mathbf{Q}(i)$ において分岐すると言いますが、2 以外の素数は $\mathbf{Q}(i)$ において分岐をしません。分岐するものはこのように例外的であり、そういうものは変なややこしいやつだから除外して考えた方がいいとも思えます（実際 4 でわって 1 余るか 3 余るかという話では除外して考えました)。が、よく考えてみると、4 でわって 1 余るか 3 余るかというその 4 は、この分岐する素数 2 のべきなのです。このように類体論においては、代数体 K の Abel 拡大体 L における K の素イデアルの分解法則が、L で分岐する K の素イデアルのべき積を用いたことばで表されます。分岐する例外的な有限個の素イデアルが、他のすべての素イデアルの運命をにぎっているのです。こういうわけですから、分岐を研究することは、例外的な嫌なやつを嫌々調べるというよりは、重要な情報が分岐するものに集中して現れることを見るということになります。

分岐理論には、代数体の拡大で素イデアルが分岐することの研究と平行して、代数多様体の有限被覆の分岐の研究があり、特に標数 $p > 0$ の高次元の代数多様体の分岐理論は、未解決の問題が多いです。

関数係数線形微分方程式についての深い理論として、D 加群の理論が発展してきました。代数多様体 X の上の D 加群の特性サイクルは、X の余接束の中に定義されるもので、その D 加群の特異性（ D 加群がどのように退化しているか、悪いか）を表す大変重要なものです。D 加群の理論と分岐理論はよく似ています。代数多様体 X の有限被覆の分岐にも、その特性サイクルが、X の余接束の中に定義されるというのが斎藤毅氏の理論です。正確には D 加群と ℓ 進層を似たものと考え、D 加群の特異性をとらえる D 加群の特性サイクルと類似した、 ℓ 進層の分岐をとらえる ℓ 進層の特性サイクルを斎藤毅氏が定義したのですが、ちゃんとした説明はここではできません。この特性サイクルの構成には、 Beilinson の貢献もありました。

$$\begin{array}{ccc} D\text{ 加群} & \overset{\text{類似}}{\leftrightarrow} & \ell\text{ 進層} \\ D\text{ 加群の特異性} & \overset{\text{類似}}{\leftrightarrow} & \ell\text{ 進層の分岐} \\ \text{特性サイクル} & \overset{\text{類似}}{\leftrightarrow} & \text{特性サイクル} \end{array}$$

この特性サイクルを用いて、Grothendieck が夢見た ℓ 進層の Riemann-Roch 定理も導けます。分岐理論において特性サイクルのようなものが存在するだろうかということは、Deligne が友人の Illusie にあてた 1973 年の手紙にも、夢あるいは問題として書いていたことでした。この特性サイクルの理論の完成は、分岐理論の決定打であり、微分方程式の理論と整数論がこれによって、より深くつながるなど、新しい進展が生まれていくように思われます。

いろいろのことを紹介すべきでしたが、私の力不足で、とても十分な解説になりませんでした。たとえば望月新一氏の abc 予想の仕事を紹介できませんでした。望月氏の仕事は、私の恩師の伊原康隆先生の、基本群の整数論に関する仕事 ([4]) に関係があり、望月氏が中村博昭氏、玉川安騎男氏となしとげた 基本群に関する Grothendieck 予想の解決 ([9]) と関係しますが、そのあたりのことも説明できませんでした。

多くのすぐれた業績にふれることができませんでした。整数論と言いながら、解析数論の方面の進歩については全く紹介できませんでした。

この関西大学のある関西は、大阪京都神戸などいろいろな街があり、場所ごとに古い歴史がなります。限られた時間だけで観光することは難しいです。整数論もそれに似ていて、いろいろな分野がありそれぞれ歴史を持っていて、限られた時間内で見て回ることは難しいです。この講演が、私に近い分野の話になりましたことをおわびします。

これまでもそうでありましたように、想像もできなかったような発展がこれからも、次の世代、次の世代によって生み出されていくものと思います。

もとの原稿の誤りをいろいろ指摘してくださった伊藤哲史氏、中山能力氏、臼井三平氏に感謝します。

文献

[1] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, R. Taylor, A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II, P.R.I.M.S. 47 (2011), 29–98.

[2] K. Fujiwara, Galois deformations and arithmetic geometry of Shimura varieties, Proc. International Congr. Math. vol II (2006), 347–371.

[3] H. Hida, On p-adic Hecke algebras for GL_2, Proc. International Congr. Math. vol 1, 2 (1987), 434–443.

[4] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proc. International Congr. Math. vol I, II (1991), 99–120.

[5] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque 295 (2004), 117–290.

[6] M. Kerz, S. Saito, Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes, Publ. Math. IHES, 115 (2012), 123–183.

[7] M. Kerz, S. Saito, Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory, to appear in Duke Math. J.

[8] M. Kurihara, Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type, Proceedings of the London Mathematical Society 104 (2012), 728–769.

[9] S. Mochizuki, The profinite Grothendieck conjecture for closed hyperbolic curves over number fields, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 3 (1996), 571–627.

[10] T. Saito, The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, Invent. math. (2016). doi:10.1007/s00222-016-0675-3.

[11] C. Skinner, E. Urban, The Iwasawa Main Conjectures for GL_2, Inventiones math. 195 (2014), 1–277.

[12] R. Taylor, Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l representations. II, Pub. Math. IHES, 108 (2008), 183–239.

[13] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, Invent. Math. 137 (1999), 233–411.

[14] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Ann. of Math. 141 (1995), 443–551.