粘性解と漸近問題

割引消去問題を中心に

石井　仁司　(早稲田大学)*

概　要

偏微分方程式の粘性解の概念は Crandall と Lions により導入されてから 35 年程になる．この理論の発展の一つの側面として，微分方程式の漸近問題への応用との関わりが重要である．本稿では漸近問題の一つであり，最近研究が進展しているハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を含む完全非線形２階楕円型方程式に対する割引消去問題に焦点を当て，漸近問題と粘性解の研究の一端に触れる．

1. 序

本稿の著者は偏微分方程式の**粘性解**（viscosity solution）の研究に長年携わってきたので，偏微分方程式に関する漸近問題への応用の観点から，講演では粘性解の発展について少し振り返ってみる．粘性解に関連する基本的な参考文献として [2–6, 10, 11, 15, 16] を挙げておく．

そもそも粘性解の命名は**粘性消去法** (vanishing viscosity method) の影響を受けたものである．ここでの粘性消去法は，ハミルトン・ヤコビ方程式の（自然な）解を得るために，与えられたハミルトン・ヤコビ (Hamilton-Jacobi) 方程式に粘性項を加えた楕円型方程式を解き，この解の粘性項の係数を 0 とする極限として見出そうというものである．この粘性消去法は微分方程式に対する漸近問題の一つといえる．

近年盛んに研究されている粘性解に関連した漸近問題として，ハミルトン・ヤコビ方程式を含む完全非線形退化楕円型・放物型方程式の均質化の研究，完全非線形退化放物型方程式の長時間漸近挙動の研究が挙げられる．この様な研究で大事なことは，極限関数が満たす方程式の解空間の構造であるが，これの解析に**弱 KAM**(Kolmogorov-Arnold-Moser) **理論**が重要な役割を果たしている．弱 KAM 理論に関する参考文献として [8, 9] を挙げる．

著者が最近関わっている一つの漸近問題に焦点を当て，ハミルトン・ヤコビ 方程式を含むような完全非線形偏微分方程式の漸近問題の研究の一端を紹介する．

2. 割引消去問題

最近興味を持っている漸近問題について説明したい．次のハミルトン・ヤコビ方程式を考える．

$$\text{(DP)} \qquad \lambda u + H[u] = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

本研究は科研費 (課題番号:16H03948，26220702) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: MSC-49H25, MSC-35D40, MSC-35B40
キーワード : viscosity solution, asymptotic behavior, Hamilton-Jacobi equation, fully nonlinear elliptic equation
* 〒 169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1　早稲田大学 教育・総合科学学術院
e-mail: hitoshi.ishii@waseda.jp
web: http://www.edu.waseda.ac.jp/~ishii/

ただし，$\lambda > 0$ は定数，$u\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ は未知関数，$H\colon \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はハミルトニアン，$\mathbb{T}^n$ は n 次元トーラス $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ を表す．$H[u]$ は $H(x, Du) = H(x, \partial u/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ の簡略記法とする．

(DP) の様に $\lambda > 0$ を係数とする項 λu を持ったハミルトン・ヤコビ方程式は一意可解性の観点から扱いやすい．最適制御に現われるハミルトン・ヤコビ方程式としてみるとき，係数 λ は割引率に対応する．

割引消去問題 (vanishing discount problem) とは，割引率 λ を 0 に近づけるときの (DP) の解 v^λ の漸近挙動を調べる問題である．

2.1. 復習

ハミルトニアン H に対して，次の仮定をおく．

(HR) $$H \in C(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n),$$

(HK) $$\lim_{R\to\infty} \inf\{H(x,p)\colon x \in \mathbb{T}^n,\ |p| > R\} = \infty.$$

H に対する (HK) の条件は**強圧性** (coercivity) と呼ばれる．

粘性解の範疇で考えるとき，次の定理が成り立つ．

定理 1 (HR), (HK) を仮定する．

(i) (DP) は一意解 $v^\lambda \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^n)$ を持つ．

(ii) $\|\lambda v^\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \le C_0$ が成立する．ただし，$C_0 := \|H(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$.

(iii) $\lambda > 0$ に依らない定数 $C_1 > 0$ が存在して，$\|Dv^\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \le C_1$ が成立する．

(iv) (DP) に対して，比較原理が成立する．すなわち，$v, w \in C(\mathbb{T}^n)$ がそれぞれ (DP) の劣解と優解であるならば，$\mathbb{T}^n$ 上で $v \le w$ が成り立つ．

これは粘性解の理論のなかでは標準的な定理といえるが，(ii) と (iii) について少し触れる．$u(x) = \lambda^{-1}C_0$ とおくと，関数 u は

$$\lambda u + H[u] = C_0 + H(x, 0) \ge 0$$

を満たし，(DP) の優解である．(iv) の比較原理により，$v^\lambda \le \lambda^{-1}C_0$ が分かり，$\lambda v^\lambda \le C_0$ が成立する．同様に，$u = -\lambda^{-1}C_0$ とおくと，u は (DP) の劣解であり，$\lambda v^\lambda \ge -C_0$ が分かる．

形式的に (DP) の解 v^λ は

$$0 = \lambda v^\lambda + H[v^\lambda] \ge -C_0 + H[v^\lambda]$$

を満たす．(HK) に依れば，$C_1 > 0$ が存在し，

$$|p| > C_1 \implies H(x,p) > C_0$$

が成り立つ．これと上の不等式を組み合わせれば，$|Dv^\lambda| \le C_1$ が粘性劣解の意味で成り立ち，$|v^\lambda(x) - v^\lambda(y)| \le C_1|x-y|$ が分かる．この C_1 は λ に依存しない．

割引消去問題に関する定理を述べる．その前に，(DP) に対応する次の極限問題を導入する．

(EP) $$H[u] = c \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

この問題では，未知なるものは定数$c\in\mathbb{R}$とハミルトン・ヤコビ方程式(EP)の解uの組である．この問題を**エルゴード問題** (ergodic problem) あるいは**加法的固有値問題** (additive eigenvalue problem) と呼ぶ．この問題がハミルトン・ヤコビ方程式の均質化に関して現われるときには，**セル問題** (cell problem) と呼ばれる．

定理 2 (HR), (HK) を仮定する．v^λは(DP)の一意解とする．

(i) ある定数$c\in\mathbb{R}$に対して，$\displaystyle\lim_{\lambda\to 0+}\lambda v^\lambda(x)=-c$（$\mathbb{T}^n$上で一様収束）．

(ii) $m^\lambda=\min_{\mathbb{T}^n}v^\lambda$とおく．0に収束する数列$\{\lambda_j\}\subset(0,\infty)$と関数$u\in\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^n)$が存在し，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}(v^{\lambda_j}(x)-m^{\lambda_j})=u(x)$（$\mathbb{T}^n$上で一様収束）．

(iii) 上のcとuの組は(EP)の解である．

(iv) このような定数cは一意に定まる．

この定理は，Lions-Papanicolaou-Varadhan[17] により，ハミルトン・ヤコビ方程式の均質化の研究で得られたものである．(EP)の解に関して，上の定理によれば，定数cは一意に定まる．この定数を（ハミルトニアンHの）**臨界値** (critical value) あるいは**加法的固有値** (additive eigenvalue) と呼ぶ．

証明 まず，関数族$\{v^\lambda-m^\lambda : \lambda>0\}$は同程度（リプシッツ）連続であり，一様有界であることに注意する．アスコリ・アルツェラの定理により，数列$\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$が存在し，ある関数$u\in\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^n)$に対して

$$\lim_{j\to\infty}(v^{\lambda_j}-m^{\lambda_j})=u \quad \text{in } C(\mathbb{T}^n)$$

となる．$\{\lambda v^\lambda : \lambda>0\}$は一様有界であり，$\{\lambda m^\lambda : \lambda>0\}$は有界である．$\{\lambda_j\}$を適当な部分列に置き換えることを考えれば，ある$c\in\mathbb{R}$に対して

(1)
$$\lim_{j\to\infty}\left(-\lambda_j m^{\lambda_j}\right)=c$$

が成り立つとしてよい．$u^j=v^{\lambda_j}-m^{\lambda_j}$とおくとき，

$$\lambda_j(u^j+m^{\lambda_j})+H[u^j]=0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n$$

が成り立ち，$j\to\infty$と極限移行すれば，

$$-c+H[u]=0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n$$

（粘性解）が得られる．従って，cとuの組は(EP)の解である．これで(ii)と(iii)が示された．

(iv)を示すために，(c_1,u_1)と(c_2,u_2)を(EP)の解とする．仮に$c_1\neq c_2$であるとするとき，$c_1<c_2$か$c_1>c_2$の二つの場合があるが，$c_1<c_2$の場合だけ考えれば十分であろう．$c=(c_1+c_2)/2$とおくとき，$\varepsilon>0$を小さく取れば

$$\varepsilon u_1+H[u_1]\le c, \quad \varepsilon u_2+H[u_2]\ge c \quad \text{in } \mathbb{T}^n$$

（粘性解の意味で）が成り立つ．定理1の(iv)により，$u_1\le u_2$が成り立つ．しかし，この不等式は，すべての$a\in\mathbb{R}$に対して，u_1をu_1+aに置きかえても成立しなければならない．なぜならば，(c_1,u_1+a)も(EP)の解であるから．これは矛盾である．

最後に，(i) の証明であるが，(ii), (iii) の証明と同様にして，0 に収束する任意の数列 $\{\lambda^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ に対して，その部分列 $\{\lambda^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ と定数 $d \in \mathbb{R}$ と関数 $w \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^n)$ が存在し，

$$\lim_{j\to\infty} \lambda^{k_j} m^{\lambda^{k_j}} = -d \tag{2}$$

となり，(d,w) は (EP) の解となる．(iv) により，$d = c$ が分かる．$C_1 > 0$ を（同程度リプシッツな）関数族 $\{v^\lambda : \lambda > 0\}$ のリプシッツ定数とすれば，$\mathbb{T}^n$ 上で

$$\lambda|v^\lambda(x) - m^\lambda| \le \lambda C_1|x-y| \le \lambda C\sqrt{n}$$

が成り立ち，(2) より，

$$\lim_{j\to\infty} \lambda^{k_j} v^{\lambda^{k_j}} = -c \quad \text{in } C(\mathbb{T}^n).$$

これから，(i) が分かる． □

2.2. 粘性 Mather 測度と粘性 Green 測度

つぎの結果は Davini-Fathi-Iturriaga-Zavidovique[7] による．まず，次の条件を付け加える．

(HT) すべての $x \in \mathbb{T}^n$ に対して，$p \mapsto H(x,p)$ は凸関数である．

定理 3 (HR)，(HK)，(HT) を仮定する．v^λ は (DP) の解，c は H の臨界値であるとする．このとき，(EP) のある解 (c,u) に対して，つぎが成り立つ．

$$\lim_{\lambda\to0+} \left(v^\lambda + \lambda^{-1}c\right) = u \quad \text{in } C(\mathbb{T}^n). \tag{3}$$

これを定理 2 の (ii) と比較する．まず，定理 3 により，

$$\lim_{\lambda\to0+} (m^\lambda + \lambda^{-1}c) = \min_{\mathbb{T}^n} u \qquad (m^\lambda := \min_{\mathbb{T}^n} v^\lambda) \tag{4}$$

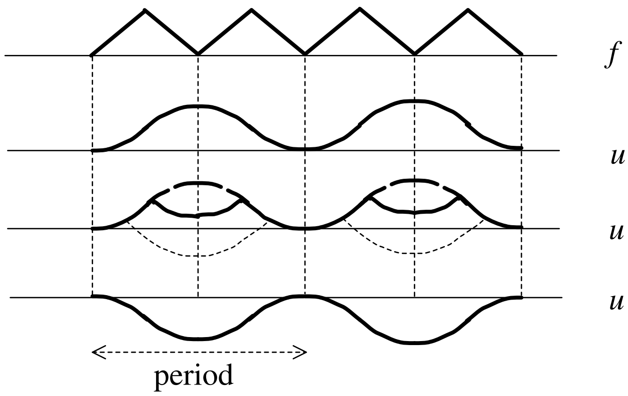
が成り立つので，(3) と (4) の差を取って，

$$\lim_{\lambda\to0+} (v^\lambda - m^\lambda) = u - \min_{\mathbb{T}^n} u \quad \text{in } C(\mathbb{T}^n).$$

逆に，これから (3) も得られる．従って，定理 3 と定理 2 の (ii) の違いは，$\lambda \to 0+$ なる極限操作を全体で考えるのか，あるいは一部の列で考えるのかという点にある．この違いは，極限問題 (EP) の解の構造に依存するが，ハミルトン・ヤコビ方程式 (EP) の解構造は簡単ではない．次の例を考える．$n = 1$, $H(x,p) = |p| - f(x)$, $f(x) = \min\{|x-y| : y \in 2^{-1}\mathbb{Z}\}$ の場合．この図で与えられるような関数 u に任意定数 a を加えた関数 $u + a$ がすべての解を与える．

上の定理 3 の証明の概略を [13] に沿って説明する．この証明法の利点は完全非線形 2 階退化楕円型方程式の場合にも適用できることである．ただし，条件を少し強める必要がある．H のラグランジアン L を次式で定める．

$$L(x,\alpha) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} (\alpha\cdot p - H(x,p)) \quad \forall (x,\alpha) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n.$$



ここで，$\alpha \cdot p$ は内積 $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n$ を表す．次の条件を新たに課す．

$$\text{(HC)} \qquad \begin{cases} \text{あるコンパクト集合 } \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \text{ に対して，} L \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})\text{，かつ} \\ \mathbb{T}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}) \text{ 上で } L(x, \alpha) = \infty. \end{cases}$$

コンパクト集合 $\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$ 上のラドン測度 μ の全体を $\mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ と表す．$\lambda \in [0, \infty)$ に対して，$\mathcal{F}(\lambda)$ を次の様な関数の族とする．$(\phi, u) \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \times C(\mathbb{T}^n)$ に対して，

$$(\phi, u) \in \mathcal{F}(\lambda) \iff u \text{ は } \lambda u + H_\phi[u] = 0 \text{ in } \mathbb{T}^n \text{ の劣解である}$$

として定義する．ただし，$H_\phi(x, p) := \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{p \cdot \alpha - \phi(x, \alpha)\}$ （このとき，$H(x, p) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{p \cdot \alpha - L(x, \alpha)\} = H_L(x, p)$ に注意する）．ここでは，$\lambda = 0$ の場合も扱っている．

H の凸性と比較原理を用いると次を示すことが出来る．

命題 1 (HR), (HK), (HT), (HC) を仮定する．任意の $\lambda \geq 0$ に対して，$\mathcal{F}(\lambda)$ は原点を頂点に持つ凸錘である．

本稿ではこの命題の証明を省略する ([13] を参照のこと)．

$(z, \lambda) \in \mathbb{T}^n \times [0, \infty)$ とし，もう一つの原点を頂点とする凸錘 $\mathcal{G}(z, \lambda)$ を導入する．

$$\mathcal{G}(z, \lambda) = \{\phi - \lambda u(z) : (\phi, u) \in \mathcal{F}(\lambda)\}$$

と定義する．Riesz の定理によれば，$\mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ は $C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ の双対空間を与える．$\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ と $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ の内積

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}} \phi(x, \alpha) \mu(dx d\alpha)$$

を $\langle \mu, \phi \rangle$ と表す．$\mathcal{G}(z, \lambda)$ の双対錘 $\mathcal{G}'(z, \lambda)$ は次で与えられる．

$$\mathcal{G}'(z, \lambda) = \{\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) : \langle \mu, f \rangle \geq 0 \ \ \forall f \in \mathcal{G}(z, \lambda)\}.$$

$\mathcal{G}(z, 0)$, $\mathcal{G}'(z, 0)$ は z に依存しないので，それぞれ $\mathcal{G}(0)$, $\mathcal{G}'(0)$ とも表す．

命題 2 (HR), (HK), (HT), (HC) を仮定する．$(z, \lambda) \in \mathbb{T}^n \times [0, \infty)$ のとき，任意の $\mu \in \mathcal{G}'(z, \lambda)$ は非負測度である．

証明 $\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ が $\phi \geq 0$ を満たすとき，$u = 0$ は $\lambda u + H_\phi[u] = 0$ in $\mathbb{T}^n$ の劣解である．したがって，このとき $\phi \in \mathcal{G}(z,\lambda)$ となり，$\mu \in \mathcal{G}'(z,\lambda)$ であれば，$\langle \mu, \phi \rangle \geq 0$. □

$\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$ 上の**確率**測度 $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ の全体を $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ と表すとき，上の命題2より，

$$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z,\lambda) = \{\mu \in \mathcal{G}'(z,\lambda) \colon \mu(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) = 1\}.$$

次の定理が成り立つ．

定理 4 ([13]) (HR), (HK), (HT), (HC) を仮定する．$\lambda > 0$ とし，$v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ は (DP) の解であるとするとき，

$$v^\lambda(z) = \lambda^{-1} \min_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z,\lambda)} \langle \mu, L \rangle. \tag{5}$$

これは解の表現公式である．適当な条件下で，この公式は（ハミルトン・ヤコビ・ベルマン型の）完全非線形2階退化楕円型偏微分方程式に対しても成り立つ．(5) における $\lambda^{-1}\mu$ はデータ L に解を対応させる測度と考え，特に，(5) の右辺の最小点 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z,\lambda)$ に対して，$\lambda^{-1}\mu$ を（(DP) に対する z における）**粘性 Green 測度**と呼ぶ.

この定理の証明の概略は以下のようなものである．まず，Sion のミニマックス定理の次の簡単な場合 [21, Cor. 3.3] を述べる．

命題 3 X と Y はそれぞれ実線形空間の空でない凸部分集合であり，さらに X はコンパクトな位相空間であるとする．関数 $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ は次の (i) と (ii) を満たすとする．

(i) それぞれの $x \in X$ に対して，$Y \ni y \mapsto f(x,y)$ は凹関数である．

(ii) それぞれの $y \in Y$ に対して，$X \ni x \mapsto f(x,y)$ は凸関数であり，下半連続である．このとき，次が成り立つ．

$$\sup_Y \min_X f = \min_X \sup_Y f.$$

定理4の証明 まず，$\mathcal{G}'(z,\lambda)$ の定義と $\mathcal{G}(z,\lambda)$ が錘であることから，

$$\inf_{f \in \mathcal{G}(z,\lambda)} \langle \mu, f \rangle = \begin{cases} 0 & \forall \mu \in \mathcal{G}'(z,\lambda), \\ -\infty & \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \setminus \mathcal{G}'(z,\lambda). \end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z.\lambda)} \left(\langle \mu, L \rangle - \inf_{f \in \mathcal{G}(z,\lambda)} \langle \mu, f \rangle \right) &= \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z.\lambda)} \langle \mu, L \rangle, \\ \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \setminus \mathcal{G}'(z.\lambda)} \left(\langle \mu, L \rangle - \inf_{f \in \mathcal{G}(z,\lambda)} \langle \mu, f \rangle \right) &= \infty. \end{aligned}$$

また，上の2式の左辺をそれぞれ A, B とおくとき，

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})} \left(\langle \mu, L \rangle - \inf_{f \in \mathcal{G}(z,\lambda)} \langle \mu, f \rangle \right) = \min\{A,\, B\}.$$

従って，

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z,\lambda)} \langle \mu, L \rangle = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})} \sup_{f \in \mathcal{G}(z,\lambda)} \langle \mu, L - f \rangle.$$

さらに，Sionのミニマックス定理（命題3）により，

$$\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)}\langle\mu,L\rangle=\sup_{f\in\mathcal{G}(z,\lambda)}\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})}\langle\mu,L-f\rangle. \tag{6}$$

このミニマックス定理の適用の際には，$\mathcal{R}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})$に測度の弱収束に関する位相を付与し，このときに，$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\subset\mathcal{R}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})$がコンパクトであり，さらに，$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)$がコンパクトであることを使う．

$(L,v^\lambda)\in\mathcal{F}(\lambda)$なので，(6)の右辺において，$f=L-\lambda v^\lambda(z)$と取れば，

$$\sup_{f\in\mathcal{G}(z,\lambda)}\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})}\langle\mu,L-f\rangle\geq\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})}\langle\mu,\lambda v^\lambda(z)\rangle=\lambda v^\lambda(z).$$

したがって，(6)より，

$$\lambda v^\lambda(z)\leq\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)}\langle\mu,L\rangle. \tag{7}$$

この(7)と逆向きの不等式を示せばよい．そこで，ある$\varepsilon>0$に対して

$$\lambda v^\lambda(z)+\varepsilon<\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)}\langle\mu,L\rangle.$$

が成り立つとして，矛盾を導く．この仮定と(6)を組み合わせると，

$$\lambda v^\lambda(z)+\varepsilon<\sup_{f\in\mathcal{G}(z,\lambda)}\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})}\langle\mu,L-f\rangle.$$

これより，ある$(\phi,u)\in\mathcal{F}(\lambda)$に対して，

$$\lambda v^\lambda(z)+\varepsilon<\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})}\langle\mu,L-\phi+\lambda u(z)\rangle.$$

上の式のμとしてディラック測度$\delta_{(x,\alpha)}$ $((x,\alpha)\in\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})$を考えれば，

$$\lambda v^\lambda(z)+\varepsilon<(L-\phi)(x,\alpha)+\lambda u(z).$$

すなわち，

$$\phi<L+\lambda(u-v^\lambda)(z)-\varepsilon\quad\text{in }\mathbb{T}^n\times\mathcal{A}.$$

さらに，u（$w:=u-(u-v^\lambda)(z)+\lambda^{-1}\varepsilon$）が$\lambda u+H[u]=\lambda(u-v^\lambda)(z)-\varepsilon$ in $\mathbb{T}^n$ ($\lambda w+H[w]=0$ in $\mathbb{T}^n$)の劣解である．比較原理によれば，$\mathbb{T}^n$上で$w\leq v^\lambda$が成り立つ．特に，$w(z)=v^\lambda(z)+\lambda^{-1}\varepsilon\leq v^\lambda(z)$．これは矛盾である．以上により，

$$\lambda v^\lambda(z)=\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)}\langle\mu,L\rangle. \qquad\square$$

(5)の右辺の最小点である測度$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)$の一つを$\mu^\lambda$と表し，$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(z,\lambda)$がコンパクトであることを使えば，0に収束する数列$\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$が存在し，ある$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(0)$に対して，測度の弱収束の意味で$\{\mu^{\lambda_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$は$\mu$に収束する．このことと定理2の(i)より，次の定理が得られる（証明の詳細は省略する）．

定理 5 (HR), (HK), (HT), (HC)を仮定する．cをHの臨界値とする．このとき，

$$-c=\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A})\cap\mathcal{G}'(0)}\langle\mu,L\rangle. \tag{8}$$

上の (8) の右辺の最小点 μ を**粘性 Mather 測度**という．粘性 Mather 測度という用語は，完全非線形2階楕円型方程式（ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式）を意識したもので，1階のハミルトン・ヤコビ方程式だけ考えるときには Mather 測度と同じものである．すなわち，$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ が次の命題の条件 (ii) と $-c = \langle \mu, L\rangle$ を満たすときに，μ は **Mather 測度**と呼ばれる．Mather 測度に関しては [7,9,18,19] を参照されたい．

命題 4 (HR), (HK), (HT), (HC) の仮定の下で，$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ に対する次の (i) と (ii) は同値な条件である．

(i) $\mu \in \mathcal{G}'(0)$.

(ii) $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$ に対して，$f(x,\alpha) = D\psi(x)\cdot\alpha$ とおくとき，$\langle \mu, f\rangle = 0$ が成り立つ．

この命題の証明の鍵は，任意の $(\phi, u) \in \mathcal{F}(0)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$H_\phi[u^\varepsilon] \le \varepsilon$ in $\mathbb{T}^n$ を満たす $u^\varepsilon \in C^1(\mathbb{T}^n)$ が存在することである．このことは通常の軟化子の議論と H の凸性を使えば容易に示すことが出来る．上の命題の証明は省略する．

2.3. 定理3の証明

H, L, v^λ((DP) の解) を $H-c,\ L+c,\ v^\lambda + \lambda^{-1}c$ に置きかえるとき，この変換後の臨界値は0 となる．この変換を施した後で定理3を示せばよいので，以下では，$c=0$ と仮定する．

命題 5 (HR), (HK), (HT), (HC) を仮定し，臨界値 c は0であるとする．v^λ で (DP) の解を表す．$\{v^\lambda : \lambda > 0\}$ は一様有界である．

この命題の証明を簡単に述べる．$(0,u)$ を (EP) の解とし，定数 $C>0$ を $|u| \le C$ となるように取れば，関数 $u+C$ と $u-C$ はそれぞれの (DP) の優解と劣解になり，比較原理より，$u - C \le v^\lambda \le u + C$ が $\mathbb{T}^n$ 上で成り立つ．

定理3の証明 $c=0$ と仮定する．関数族 $\{v^\lambda : \lambda > 0\}$ の $\lambda \to 0$ としたときの $C(\mathbb{T}^n)$ における集積点の全体を $\mathcal{U}$ と表す．定理1の (iii) と命題5により，$\{v^\lambda : \lambda > 0\}$ は $C(\mathbb{T}^n)$ において相対コンパクトであるから，$\mathcal{U} \neq \emptyset$ である．粘性解の一様収束に関する安定性から，すべての $u \in \mathcal{U}$ は $H[u] = 0$ in $\mathbb{T}^n$ の解である．

定理の証明には $\mathcal{U}$ が一点からなる集合であることを示せばよい．$z \in \mathbb{T}^n$, $v, w \in \mathcal{U}$ を固定する．さらに，$C(\mathbb{T}^n)$ において $\lim_{j\to\infty} v^{\lambda_j} = v$, $\lim_{j\to\infty} v^{\delta_j} = w$ が成り立つ様な0に収束する数列 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \{\delta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ を選び,

$$\lambda_j v^{\lambda_j}(z) = \langle \mu_j, L\rangle$$

となる $\mu_j \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}'(z, \lambda_j)$ を選ぶ（定理4）．

（概略しか述べてないが）定理5の証明と同様にして一度 $\{(\lambda_j, \delta_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ を部分列に置きかえる操作をした後で，ある粘性 Mather 測度 μ に対して，測度の弱収束の意味で $\lim_{j\to\infty} \mu_j = \mu$ が成り立つとしてよい．

$(L - \delta_j v^{\delta_j},\ v^{\delta_j}) \in \mathcal{F}(0)$ と $(L + \lambda_j w, w) \in \mathcal{F}(\lambda_j)$ に注意する．従って,

$$0 \le \langle \mu, L - \delta_j v^{\delta_j}\rangle = -\delta_j \langle \mu, v^{\delta_j}\rangle,$$
$$0 \le \langle \mu_j, L + \lambda_j w - \lambda_j w(z)\rangle = \lambda_j v^{\lambda_j}(z) + \lambda_j\left(\langle \mu_j, w\rangle - w(z)\right)$$

この第1式を δ_j で割り，第2式を λ_j で割り，$j \to \infty$ とすれば，次が得られる．

$$\langle \mu, w\rangle \le 0, \qquad 0 \le v(z) + \langle \mu, w\rangle - w(z).$$

これより，$w(z) \le v(z)$ が成立する．z, v, w の任意性から，$\mathcal{U}$ が高々1点であることが分かる． $\square$

3. ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の場合

3.1. トーラス上の場合

以下では，完全非線形2階退化楕円型偏微分方程式を考え，第2節の結果がどのように一般化できるかをごく簡単に説明する．

(DP) の H を次の F に置き換える．

$$F(x,p,X) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (-\operatorname{tr} a(x,\alpha)X - b(x,\alpha)\cdot p - L(x,\alpha)).$$

ただし，$\mathbb{S}^n$ により，n 次実対称行列の全体を表すことにして，$F\colon \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ は連続関数であるとする．$\mathcal{A}$ は σ-コンパクトで局所コンパクトな距離空間（$\neq \emptyset$）とする．$\mathbb{S}^n_+$ により，非負定値行列 $A \in \mathbb{S}^n$ の全体を表すことにする．

(FD) $\qquad a(x,\alpha) \in \mathbb{S}^n_+ \qquad \forall (x,\alpha) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$

（F の退化楕円性）を仮定し，$a\colon \mathbb{T}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{S}^n_+$, $b\colon \mathbb{T}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, $L\colon \mathbb{T}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ に対して，

(FR) $\qquad a, b, L$ および F は連続関数である

と仮定する．さらに，

(L) $\qquad L = +\infty \qquad$ at infinity

を仮定する．この意味は，任意の $M > 0$ に対して，コンパクト集合 $K \subset \mathcal{A}$ が存在し，次が成り立つことである．

$$L(x,\alpha) > M \qquad \forall (x,\alpha) \in \mathbb{T}^n \times (\mathcal{A} \setminus K).$$

考える方程式は

(DP) $$\lambda u + F[u] = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n$$

($\lambda > 0$) であり，問題は $\lambda \to 0+$ とするときの解の漸近挙動である．このタイプの方程式はハミルトン・ヤコビ・ベルマン (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式と呼ばれる．ここで，$F[u]$ は関数 $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x))$ の簡略記法である．

F に対する仮定を次の様な形で述べる．(DP) の可解性，(DP) に対する（局所）比較原理，(DP) の解の同程度連続性の3条件が成立すること．すなわち，

(K) $\qquad$ (DP) は解 $v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を持つ．

(HG) $\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{次の比較原理が成り立つ：} U \subset \mathbb{T}^n \text{ を開集合とし，} \eta \in C(\mathbb{T}^n) \text{ とする．} \\ v, w \in C(U) \text{ がそれぞれ } \lambda u + F[u] = \eta \text{ in } U \text{ の劣解，優解であり，} \\ v \le w \text{ が } \partial U \text{ 上で成り立つとき，} v \le w \text{ が } U \text{ 上で成り立つ．} \end{array} \right.$

(DR) $\qquad v^\lambda$ を (DP) の解とする．関数族 $\{v^\lambda\}_{\lambda>0}$ は $\mathbb{T}^n$ 上同程度連続である．

定理 6 (FD), (FR), (L), (K), (HG), (DR) を仮定する．(i) エルゴード問題

$$F[u] = c \quad \text{in } \mathbb{T}^n$$

は解 $(c, u) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{T}^n)$ を持つ．c は一意に定まる．（この c を臨界値と呼ぶ．）(ii) $v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を (DP) の解とし，c を臨界値とするとき，$F[u] = c$ in $\mathbb{T}^n$ のある解 $u \in C(\mathbb{T}^n)$ に対して，

$$\lim_{\lambda \to 0+} \left(v^\lambda + \lambda^{-1} c \right) = u \quad \text{in } C(\mathbb{T}^n) \tag{9}$$

が成り立つ．

(9) の証明には，粘性 Mather 測度と粘性 Green 測度が重要であるが，これらの定義はハミルトン・ヤコビ方程式の場合と同様である．ただし，$\mathcal{A}$ のコンパクト性の仮定がないので $\mathcal{F}(\lambda)$ ($\lambda \geq 0$) の定義を次の様にする．まず，

$$\Phi^+ = \{ tL + \chi \colon t > 0,\ \chi \in C(\mathbb{T}^n) \}$$

と Φ^+ を定義し，$\mathcal{F}(\lambda)$ を

$$\mathcal{F}(\lambda) = \{ (\phi, u) \in \Phi^+ \times C(\mathbb{T}^n) \colon \lambda u + F_\phi[u] \leq 0 \text{ in } \mathbb{T}^n \text{（粘性劣解の意味）} \}$$

と定義する．ただし，

$$F_\phi(x, p, X) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(-\operatorname{tr} a(x, \alpha) X - b(x, \alpha) \cdot p - \phi(x, \alpha) \right).$$

この $\mathcal{F}(\lambda)$ を基に $\mathcal{G}(z, \lambda)$, $\mathcal{G}'(z, \lambda)$ をハミルトン・ヤコビ方程式の場合と同様に定義すれば，定理 4, 5 と同様の結論が得られる．

3.2. 有界領域上の境界値問題

$\mathbb{R}^n$ の有界領域上の (DP) に対する境界値問題に対しても，これまでの議論は適用できる．[14] では，境界条件として状態拘束条件，ディリクレ条件，ノイマン条件の場合について粘性 Green 測度，粘性 Mather 測度を導入し，割引消去問題に対する定理 6 と同様な肯定的な結果を与えている．

参考文献

[1] E. S. Al-Aidarous, E. O. Alzahrani, H. Ishii, and A. M. M. Younas, *A convergence result for the ergodic problem for Hamilton-Jacobi equations with Neumann-type boundary conditions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **146A** (2016), 1-18 (2016).

[2] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.

[3] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 17, Springer-Verlag, Paris, 1994 (French, with French summary).

[4] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), no. 2, 487–502.

[5] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 1, 1–67.

[6] M. G. Crandall and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 1, 1–42.

[7] A. Davini, A. Fathi, R. Iturriaga, and M. Zavidovique, *Convergence of the solutions of the discounted equation*, to appear in Invent. Math. (Preprint is available in arXiv:1408.6712).

[8] A. Fathi, *Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 9, 1043–1046 (French, with English and French summaries).

[9] ———, *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, seventh preliminary version*, pp. 271.

[10] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, 2nd ed., Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 25, Springer, New York, 2006.

[11] Y. Giga, *Surface evolution equations*, Monographs in Mathematics, vol. 99, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. A level set approach.

[12] D. A. Gomes, *Duality principles for fully nonlinear elliptic equations*, Trends in partial differential equations of mathematical physics, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 61, Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 125–136.

[13] H. Ishii, H. Mitake, and H. V. Tran, *The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 1: the problem on a torus*, submitted, (Preprint is available in arXiv:1603.01051).

[14] ———, *The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 2: boundary value problems*, (Preprint is available in arXiv:1607.04709).

[15] S. Koike, *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, MSJ Memoirs, vol. 13, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[16] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics, vol. 69, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1982.

[17] P.-L. Lions, G. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan, *Homogenization of Hamilton–Jacobi equations*, unpublished work (1987).

[18] R. Mañé, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity **9** (1996), no. 2, 273–310.

[19] J. N. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207** (1991), no. 2, 169–207.

[20] H. Mitake and H. V. Tran, *Selection problems for a discounted degenerate viscous Hamilton–Jacobi equation*, submitted, (Preprint is available in arXiv:1408.2909).

[21] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176.