M. F. Atiyah 教授記念特別講演

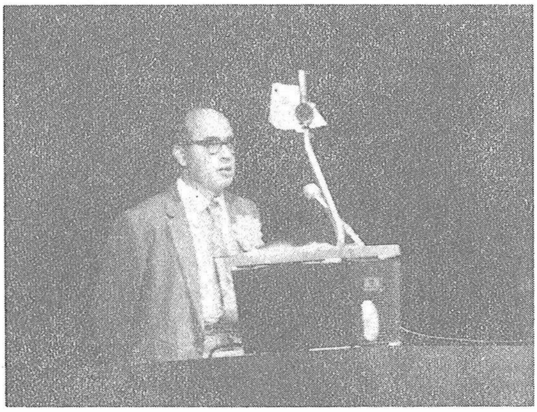
Geometry and Physics

(1977年10月9日　於 共立女子学園講堂)

'Geometry and Physics' と題する M. F. Atiyah 教授の記念特別講演はまず，世界最古に創立されたというロンドン数学会からの祝詞の披露からはじまった．さらに今年は英国でも **G. H. Hardy** の生誕100年を記念する会が催されること，また **Gauss** の生まれたのが **1777** 年であることにもふれて，会場の雰囲気を盛り上げた．本題では，古く **Euclid** に説きおこし，19・20世紀の幾何学を物理学との関連のもとに回顧したあと，教授自身のものを含む最近のいくつかの研究を例証に，これからの方向を提示した．100年祭の記念講演という性格のためもあって，講演の内容は具体的な理論には深入りせず，教授の数学に対する考え方の方が前面にでた形のものであった．しかし教授の幾何学に対する情熱と誇りのにじみでた迫力ある1時間であった．以下に紙数の許す範囲で講演の大要をできるだけ忠実に記したいと思う．

——・——

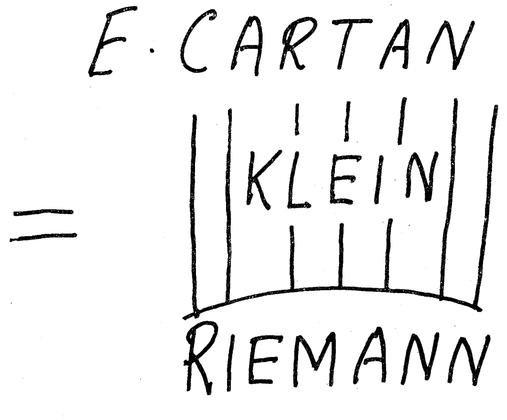
まずはじめに私の講演の性格について述べよう．さて日本数学物理学会創立100年祭を迎えた今の時点は，数学のここ100年間余りの進歩を回顧分析し，その将来をうらなうよい機会だと思われる．私が題名に '幾何学' を入れたのは，それが私の専門であり私の最も関心をいだく学問だからであるが，もちろん広い意味で使いたいと思う．私はまた '物理学' をも題名に選んだ．そのときには知らなかったのだが，きょうは著名な物理学者の方々も多く会場にいらっしゃると聞き，'物理学' のことを話すのがたいへんためらわれる．しかし数学と物理学とは100年程前まではほとんど切り離しえないものであった．その後の科学の各部門の専門化のために両者は分離されたのであるが，それでも強い関係は残され，現在では再びいつの日か昔のようにもどる傾向が見えだしているように思われる．これが '物理学' をも題名に入れた理



由である．

近代数学の出発点である **Euclid** 以来何世紀もの間，幾何学とは物理空間の研究であると信じられていた．これがくずれたのは **1828** 年頃の **Bolyai-Lobachevsky** また **Gauss** による**非ユークリッド幾何学**出現のときであるが，これは数学の歴史上特筆されるべきときである．このとき以来，幾何学は物理空間から完全に独立した概念となり，次の問題はいかなる幾何学がありうるか？　ということになった．19世紀終わりまでに確立された主要な考え方は，**F. Klein** による '幾何学とは '対称' (**symmetry**) の研究である' というものであった．空間に働く '対称の群＝変換群' (symmetry group) が幾何学を決定する，いい換えると幾何学はこの対称の群によって不変な性質を研究することであるとされ，すべての可能な幾何学を記述することとすべての対称の群を決定することとが同一視された．連続群の概念を導入した **S. Lie** の仕事もこの考え方に関連して重要な役割を演じた．近代物理学においても事情は同じで，**E. Wigner, H. Weyl** また現在では **M. Gell'man** などの仕事やまた空間の回転群やローレンツ群の果たした役割を見ればわかるように，対称の群はたいへん重要である．さて空間に働く対称の群の概念に基礎

をおく Klein の考え方よりもさらに一般的で画期的な考え方が，19世紀中頃 **Riemann** により提唱された．この中で Riemann は Klein の群の考え方を捨てて，各点が均質でないもっと一般の空間の幾何学，今日でいう**微分幾何学**を導入した．Riemann のこの幾何学は周知のように後年 **Einstein** により一般相対性理論に使われた．しかし話はこれで終わりではない．物理学者はそれまでの時間空間の変数以外にもっと多くの変数を導入する必要に迫られていた．たとえば彼等のいう**内部変数** (**internal variables**) がそれであるが，これは数学的にいうと**ファイバー束**の考え方により記述される．すなわちファイバーが内部変数を内包し，時空世界が底空間の役割を果たすのである．微分幾何学におけるこのファイバー束の概念は，20世紀初頭の **E. Cartan** の仕事により先鞭をつけられた．彼の仕事は Klein と Riemann を統一したものと考えられ，多少標語的にいうと，Cartan は Klein をファイバーとし Riemann を底空間とするファイバー束の全空間であるということもできよう．この図式は Riemann と Klein 両者の役割を端的に示す．すなわち前者は空間の概念を一般化したのに対し，後者は対称の群の働くもっと制限された空間を考えた．さて数学におけるファイバー束の理論と物理学でそれに対応する**ゲージ理論** (**Gauge theory**) についてさらに述べると，それらの理論で基本的な考え方は**平行移動**の概念である．すなわち空間 (＝底空間) の二点を結ぶ曲線に対して，第一の点の内部変数 (＝ファイバー方向の変数) を第二の点のそれに結びつける規則が与えられているのである．さてこの平行移動の概念を無限小において考えると，数学では**接続**の，また物理学では**ベクトルポテンシャル**の概念を得る．また空間内に閉曲線が与えられたとき，この曲線に沿っての平行移動のひきおこす一点上の内部変数の変換は一般には恒等変換ではない．そしてこの恒等変換とのへだたりは数学では**曲率**，物理学では**場**と呼ばれるもので記述される．以上の考察で重要なのは，空間の変数と内部変数とを全く独立に考えるのでなく，それらの間の相互作用を考慮に入れる点である．物理学にこのように幾何学的視点を導入したのは，**H. Weyl** による **1918 年**の **Maxwell 方程式**の研究にはじまる．Weyl の考え方はあまりに時代に先んじたものであり，またその物理学的解釈は正確なものではなかった．しかしそれにもかかわらずゲージ理論はこの Weyl の仕事にはじまったといってよい．この考え方は後年，1955 年に **Yang-Mills** により非可換群 (たとえば $SU(2)$) をも構造群に許す形で一般化され，現在に至るまで理論物理学の主要な一部門として活発に研究されている．



さて **Riemann** は空間の概念を一般化したのに加えてまた現代幾何学のもうひとつの主要部門である**トポロジー** (位相幾何学) をも創始した．Klein の考えた各点が均質の空間と異なり，Riemann の一般化された空間ではその**局所的性質**から**大域的性質**を推し量ることはできない．トポロジーはこの大域的性質を理解するための新しい手段といえる．しかし Riemann がトポロジーを考えだしたのは彼の幾何学に関連してではなく，複素関数論に関してである．すなわち彼は，たとえば多項式の平方根のような関数の大域的性質を調べる最良の方法は現在いうところの Riemann 面を導入してはじめてできることを発見したのである．トポロジーはまた **Poincaré** による**微分方程式**の大域理論に関連して考えられた概念をもその起源に持つ．さてこの Riemann の例では関数の

持っている**特異点**がRiemann面を導入するという新しい幾何的観点により除去され，そのかわりにいくらか複雑な構造を持つ空間＝Reimann面が出現するのであるが，この単純な例は特異点をトポロジーの問題に関係づける一般の原理を示唆しているように思う．さてRiemannの幾何学に基礎をおくEinsteinの理論は当時の微分幾何学を大いに刺激したのであるが，逆に最近の幾何学者による大域幾何学の発展は物理学に反映してEinstein方程式の解の大域的研究が始められだした．たとえば**S. Hawking**と**R. Penrose**とはEinstein方程式の解の特異点(たとえば**ブラックホール**)はただの偶発的産物ではなく，大域的視点に立つとそれらは極めて自然な数学的物理学的仮説により説明することができることを示した．このように**large scale**の物理学にトポロジーなどの大域幾何学が役立つのは理解しやすいのであるが，最近それはまた**small scale**の現象の研究にも役立つことがわかってきた．たとえば数個の粒子がある非常に狭い領域に存在し，その外部は単純な自由場の状態にあるとしよう．このような状況を記述する数学的方法としては，それを何らかの特異点として把握する方法があるが，またはこの系を記述する内部変数の空間に，あるねじれ(twisting)があると考えることもできよう．実際ある理論物理学者達は，後者の立場に立つ局所的位相幾何的考察によりsmall scaleの現象を記述するゲージ理論の中である整数値の不変量を定義した．これは**位相的量子数(topological quantum number)**と呼ばれている．もちろん近代量子論は連続的現象を離散的量により記述するというすばらしい方法を基礎とし，数学の種々な分野での，連続なデータを離散的量により分類表現する理論，たとえば連続なポテンシャルに依存する微分方程式の固有値とかコンパクト群の表現の理論が量子論で重要な役割を果たしてきた．しかし位相的量子数は数学的にはファイバー束の全空間におけるねじれを数量化したものであり，今までのものとは全く性質の異なる新しい方法によるものである．

さてここでしばらく物理学を離れて幾何学にもどろう．前にいったようにRiemannとPoincaréはトポロジーの基礎を築いたが，彼等の動機は**解析学(analysis)**(複素関数論と微分方程式論)からの要請によった．したがって自然の成り行きとして解析的問題における大域的位相の果す役割の研究に関心が集まった．この**解析学**と**トポロジー**を結合するというプログラムは**1930-60**年のひとつの主テーマであった．この方面での最初の主結果は1930年代の**Hodge**によるものである．彼はRiemann多様体の位相と**Laplace作用素**の間の大域的関係を研究し多くの美しい定理を得た．この仕事はその後KodairaとWeylにより継承された．この時期のもうひとつの方向は**Kodaira, Oka, H. Cartan**に始まった多変数の**複素解析学**である．これは1940-50年代に非常に活発に研究されたのであるが，そのひとつの大きな帰結は**層コホモロジー**という新しい手法の確立である．層コホモロジーはホモロジーやサイクルといったトポロジーの概念と複素関数論との結合による混合の理論といえよう．さてここで近代数学の二つの主部門である微分幾何学と複素解析学の比較について少し述べておこう．前者で基本的なのは考える空間が均質でないということである．そしてその度合は曲率によって記述され曲率はテンソル解析により計算される．一方後者においては考える空間の各点は皆同じ様相を呈している．しかしそれはまたKleinの考えたいわば大域的に均質な空間とも異なり一般には対称の群は存在しない．したがってこのような空間の研究には大域的現象を局所的理論に関連づける方法の開発が必要となる．前に述べた層コホモロジーがその役割を果たすのである．

さてこの講演の最後に私は今まで話してきた問題に関係するいくつかの例を私のかぎられた経験の中から選んで話そうと思う．それらは最近の幾何学と興味深く関係した理論物理学におけるトピックスであるが，くり返していっておくと私の経験は限られたものであるしまたそれらは物理学的には可能なモデルの例にすぎない．さてこれらのモデルに現れるひとつの現象は**anomalies**と呼ばれているものである．これは期待しないもの，尋常でないものという程の意味であるが，これがそう呼ばれる理由は次のようである．量子場の理

論を記述するモデルを考えるとき，まず古典的状況から出発して次にそれを量子化するという手続をとる．その場合古典的状況のもとでは存在したある種の対称性が量子化の過程で失なわれるときがある．その誤差を anomaly と呼ぶのである．さてこの anomaly はある場合に前に述べた**位相的量子数**と密接に関係していることが最近発見された．大ざっぱにいうと，anomaly はこの場合空間に分布するある密度のようなものであり，その積分がちょうど位相的量子数になるのである．特にもし前もってこの位相的量子数がゼロでないことがわかっている場合には，anomaly の存在が結論される．さてこれらの研究はここ10年程の間になされたのであるが，私はつい最近幾何学者達が全く同じことを同じくここ10年の間にしていたことに気づいた．詳細を説明することはできないがたとえば多様体上の Laplace 作用素の固有値 λ により定義される関数 $\sum e^{-\lambda t}$ の t が0に近づくときの漸近的性質の研究などがそれである．この研究は Hodge のプログラムに入るものでありこれらにより解析，トポロジー，そして微分幾何学の間に種々の興味深い関係が見出されたのである．しかし言葉の翻訳を行なってみると，物理学者と数学者が互にそうと知らずに全く同じことを平行して研究してきたことがわかるのである．このことはある意味では励みになる現象であるが，しかし他方両者共問題が解けてしまってから理解したのでは遅すぎるのである．そこで次に私は，問題の解決の前に言葉の翻訳に成功した例を話すことにする．今日の理論物理学は相当の困難に直面しており，その基本的な基礎に関する何か本質的に新しい考えを必要としているように思われる．ここでは私の Oxford での同僚である **Penrose** の時空世界の概念を修正することについての新しい考えを紹介する．彼によると時空世界の点はある意味で最も基本的な対象ではなく，かわりに各点を通る光の線の全体(**light cone**)をも一緒に考えるべきだというのである．こうして彼は **Minkowsky 空間**のかわりにある **3次元複素多様体**に到達する．そして種々の基本的方程式もこの新しい空間に置き換えたものが従来のものよりも単純になることを期待するのである．さて **Maxwell 方程式**についていうとその解は幾何学者がすでに発明していたものすなわち層コホモロジーにより記述されることがわかったのである．Penrose は層コホモロジーを知らなかったのであるが，ある日彼と話していた私はすぐに彼の考えているものが層コホモロジーと本質的に同じものであることに気づいた．ここで重要なのは Penrose の空間は可縮ではなく，コホモロジーが消えないことである．このことは局所的に考えても **light cone** が **2次元球面**であることから容易に推量される．さて次にソ連の物理学者 **Polyakov** が最近提唱した話題に移ろう．彼は4次元 **Yang-Mills 方程式**を通常の **4次元 Euclid 空間**において研究しているのであるが，この方程式の解(**instanton** と呼ばれる)をすべて求めることを問題としていた．ところがこの問題は数学的には**代数幾何**の問題，すなわち**3次元複素射影空間**の中の**代数曲線**を調べることと同値であることがわかった．後者についてはかなりのことがわかっておりこれにより instanton の一般的性質を論ずることができたのである．これが前に述べた解の前に翻訳のできた例である．

さて私のいいたいことを要約しよう．上に述べてきたことから私は次のようにいえるのではないかと思う．すなわち**現代幾何学の諸概念は物理学におけるモデルの構成に有効**なのではないかと．私はここで概念ということを強調したい．幾何学と物理学とは計算よりも概念を重要視する点において幾何学と代数学の間よりも近いといえる．歴史上のある時期には，物理学は数学の計算に関する手法の方により注目していた．しかし私の考えではもし幾何学者と物理学者の間に理解が進めば，幾何学的概念も物理学において有用になるのではないかと思うのである．

（森田茂之記）